

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



DEPARTAMENT DE CONSTRUCCIONS ARQUITECTÒNIQUES I
DEPARTAMENT D'ESTRUCTURES A L'ARQUITECTURA

Optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura.

**Análisis de las direcciones principales identificadas por sus
líneas isostáticas.**

TESIS DOCTORAL

ROGER SEÑÍS LÓPEZ

DIRECTORES

Dr. D. RAMON SASTRE SASTRE

Dr. D. ROBERT BRUFAU NIUBÓ

Mayo de 2014

Capítulo 1 Introducción y planteamiento. La relación entre la forma y la función estructural

1.1 Antecedentes y justificación

Los edificios construidos en vertical o en altura constituyen una tipología constructivo-edificatoria, también conocida como el «Estilo Edificatorio Americano», ya que sus inicios se remontan en Estados Unidos de América a finales del siglo XIX. Actualmente, este estilo edificatorio se proyecta y construye en muchas ciudades del Mundo convirtiéndose esta tendencia constructiva, la cual implica un cambio de tipología estructural de los edificios para alcanzar mayor altura, en un fenómeno arquitectónico ampliamente extendido y que sigue en constante auge, especialmente a partir de los años 90 de siglo pasado con la construcción de las *Petronas Towers* en Kuala Lumpur, en concreto en el año 1998, iniciando, así, la fase o el estilo Postmodernista¹ de los edificios en altura.

En un número considerable de países, se construyen edificios que destacan por su verticalidad, en muchas ocasiones, con una finalidad simbólica y emblemática, (Arquitectura Icónica), como sucede en economías emergentes de Asia siendo representativas China, Corea o Malasia, con un claro objetivo: hacer una demostración de avance tecnológico y de poder económico. Actualmente, ocho de los diez edificios más altos del mundo están en Asia y, solamente, dos en EE.UU.^[2], una vez se finalice la construcción del *One World Trade Center*.

En 1885, después del gran incendio de la ciudad de Chicago el año 1871, se construyó el que se conoce como el primer rascacielos del mundo con estructura metálica, despojando a los muros de la función resistente permitiendo, así, que se pudieran construir con posterioridad sin que su lenta ejecución interfiriera en la construcción del edificio, la cual pasó a ser significativamente más rápida. El edificio, de 10 plantas y 42 metros de altura, fue conocido como el *Home Insurance Building* de Chicago, obra de **William Le Baron Jenney** (1832-1907), marcando el inicio de un cambio en la tipología estructural de los edificios para alcanzar una mayor altura, con la intención de dar respuesta a las necesidades sociales y económicas que surgieron en las grandes ciudades de EE.UU., debido a su fuerte crecimiento^[3].

Desde entonces, son muchos los edificios que han buscado crecer en altura por las razones y motivaciones previamente mencionadas como son, ejemplo de ello, edificios tan emblemáticos construidos en Chicago y Nueva York, entre otras ciudades. Algunos símbolos arquitectónicos, como el *Chrysler Building* (1930) de 319 metros de altura, y el *Empire State Building* (1931) de 381 metros o el *Rockefeller Center Building* (1940) de 259 metros, en la ciudad neoyorkina, así como, el *John Hancock Center* de 344 metros y el *Sears Tower* (1970-1974) de 442 metros, ambos edificios ubicados en la ciudad de Chicago o el *Burj Khalifa* (2008) en Dubai, actualmente el edificio más alto con una altura de 828 metros, reflejan de forma clara esta idea y tendencia constructivo-arquitectónica en boga en las últimas décadas.

¹ El Periodo Postmodernista es la última de las cuatro etapas significativas en que [Huxtable 1988, 14] divide la evolución histórica de los edificios en altura. Todas ellas se tratarán convenientemente en el cuarto capítulo.

^[2] Ali, M.M.; Moon, K.S. (2007). *Structural Developments in Tall Buildings: Current Trends and Future Prospects*, p. 205.

^[3] Huxtable, A.L. (1988). *El rascacielos: La búsqueda de un estilo*, p. 23.

En efecto, son muchos los estudios acerca de este tipo edificatorio, como por ejemplo, los primeros que realizó el ingeniero estructural **Fazlur Khan** (1929-1982) durante la década de 1960 a 1970, proponiendo distintos sistemas estructurales que dieran una respuesta satisfactoria a las prestaciones arquitectónicas y estructurales que requieren este tipo de edificios tan particulares. Los sistemas estructurales propuestos por Khan a principios de los años 70 suponen una revolución en la concepción de edificios en altura, permitiendo la construcción de los edificios de gran relevancia, previos a la “Crisis del Petróleo” de 1973, que puso fin al *boom* constructivo que se había producido en Estados Unidos. En este sentido, el belga **Georges Binder** (1960-) define tres ciclos o periodos de construcción en la historia de los edificios en altura, y destaca que el fin de cada una de ellas coincide con el inicio de una gran crisis o recesión económica ^[4].

A priori, aun siendo más complejo, se aceptan los tres ciclos o *booms* constructivos que propone Binder, secundado el trabajo de otros autores como Lawrence ^[5] y Thornton ^[6]. El primer ciclo constructivo de edificios en altura finaliza con la “Gran Depresión” iniciada en el año 29 del siglo XX. La construcción del *World Trade Center* en Nueva York y la *Sears Tower* en Chicago, a principios de los años 70, suponen el siguiente *boom* de la construcción de edificios en altura. Una nueva etapa edificatoria de edificios en altura que tuvo su fin con la mencionada la “Crisis del Petróleo”. Finalmente, Binder ^[4] establece que el actual *boom* de edificios en altura (Periodo Postmodernista), el cual se ha visto frenado por la actual crisis, se inicia a mediados de los años 90 con la construcción de las *Petronas Towers* en Kuala Lumpur en 1998, la *Jin Mao Tower* en Shangai, representando una pagoda china y el *Burj Al Arab* en Dubai, ambos inaugurados en el año 1999.

En esta línea, como indican Barr, Mizrach y Mundra ^[7], el economista **Andrew Lawrence** (-) expone que, de acuerdo a su «Índice de Rascacielos» (*Skyscrapers Index*), iniciado en 1999, generalmente los edificios más altos del mundo se han finalizado al inicio de una recesión económica, basándose en su estudio que relaciona la construcción de los edificios en altura y las crisis económicas mundiales ^[5]. Una muestra básica de esta relación de causa-efecto, (incremento en altura-inicio recesión económica), se puede observar en la figura 1.1-1.

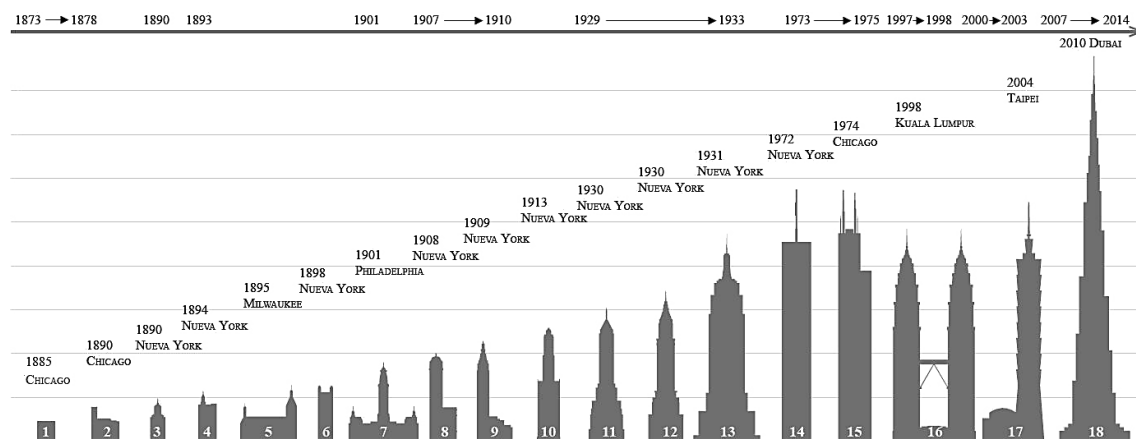


Figura 1.1-1. Relación entre los *booms* constructivos de edificios en altura y las crisis económicas más importantes. (Notación adaptada de [Lawrence 2012, 42]).

[4] Binder, G. (2008). *The “International” Skyscraper: Observations*, p. 2.

[5] Lawrence, A. (1999). *The Skyscraper Index: Faulty Towers!*, p. 42.

[6] Thornton, M. (2005). *Skyscrapers and Business Cycles*.

[7] Barr, J.; Mizrach, B.; Mundra, K. (2011). *Skyscraper Height and the Business Cycle: International Time Series Evidence*, p. 2.

Edificios de la figura 1.1-1. 1: *Home Insurance Building*. 2: *Auditorium Building*. 3: *World Building*. 4: *Manhattan Life Building*. 5: *Milwaukee City Hall*. 6: *Park Row Building*. 7: *Philadelphia City Hall*. 8: *Singer Building*. 9: *Metropolitan Life Tower*. 10: *Woolworth Building*. 11: *Bank of Manhattan Building*. 12: *Chrysler Building*. 13: *Empire State Building*. 14: *World Trade Center*. 15: *Sears Tower*. 16: *Petronas Towers*, 1&2. 17: *Taipei 101*. 18: *Burj Khalifa*.

Esta evolución histórica de los edificios en altura, secundada por los avances técnicos y tecnológicos desarrollados a lo largo de las décadas, conlleva, en sí mismo, una evolución formal y estructural de dicho tipo constructivo. Ello permite dar respuesta a las motivaciones estéticas y funcionales, pero sobretodo y especialmente en las últimas décadas a las cuestiones de eficiencia estructural, esencialmente frente a las acciones dinámicas (el viento y el sismo), las cuales influyen de forma determinante en el diseño arquitectónico de construcciones verticales y en el concepto estructural de las mismas. El planteamiento de **optimización de edificios en altura** según las acciones solicitantes es el objetivo fundamental de la presente Tesis, como se expone y abordará de forma exhaustiva posteriormente.

Esta exigencia, optimización de edificios en altura, desde el punto de vista resistente y estético, así como la necesidad de atender las cuestiones y prestaciones arquitectónicas que requieren este tipo de edificaciones, ha suscitado un creciente interés en el uso de las **mallas espaciales como elementos estructurales envolventes** de edificios en altura. Esta tendencia conlleva, de forma implícita, que el concepto estructural adquiera un papel de mayor relevancia en el diseño y la estética del edificio. Por lo tanto, para poder hablar de una buena resolución arquitectónica del mismo, es necesaria la existencia de una estrecha relación del binomio que conforman ambas concepciones, **diseño arquitectónico y análisis estructural del edificio**, tendencia ésta que se conoce como «estética estructural»^[8].

Como se ha indicado, las mallas estructurales envolventes de edificios en altura son una tipología muy utilizada en las últimas décadas, en parte por sus elevadas prestaciones estructurales, sobretodo en base a su concepto esencial: la relación dimensiones/peso estructura, de forma que constituyen una solución constructivo-estructural que se caracteriza por su ligereza, sin mermar la rigidez estructural global del sistema, a la vez que constituye una tipología estética y visualmente agradable^[9].

Es por ello por lo que, las estructuras espaciales han tenido una relevancia significativa en el ámbito de la arquitectura. Su uso se remonta a más de doscientos años cuando, en el periodo que va de 1806 a 1811, se diseñó y construyó en París una malla como tipología estructural para edificación, en concreto, para la ejecución de la primera cúpula con esqueleto de hierro: la cúpula del mercado *Halle au Blé*. No obstante, los primeros intentos para construir mallas espaciales se le atribuyen al científico e inventor **Alexander Graham Bell** (1847-1922) durante la primera década de 1900, con sus inventos y demostraciones públicas en el ámbito estructural de la ingeniería naval y, especialmente, en el de la aeronáutica, la cual estaba teniendo un fuerte crecimiento y desarrollo. Otra referencia destacable es la primera cúpula geodésica construida, para llevar a cabo el Planetario de Jena, desarrollada por **Walther Bauersfeld** (1879-1959) como empleado de *Carl Zeiss Optical* y por **Franz Anton Dischinger** (1887-1953) como ingeniero jefe de la firma *Dywidag (Dyckerhoff & Widmann AG)*, cuya ejecución se finalizó en el año 1923, como se tratará en el tercer capítulo acerca de las mallas espaciales en la arquitectura.

[8] Señis López, R. (2013/a). *Estudio de las líneas isostáticas para optimizar mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura según sus solicitaciones*, p. 156.

[9] Subramanian, N. (1999). *Principles of Space Structures*, p. 5.

A pesar de ello, las mallas espaciales no tuvieron un papel relevante hasta los años 50 del pasado siglo, cuando se aplicaron en el mundo arquitectónico, especialmente de la mano de **Richard Buckminster Fuller** (1895-1983), quien reinventó y patentó las cúpulas geodésicas ^{[10][11]}.

Las mencionadas propiedades estructurales y estéticas de las mallas espaciales, especialmente su ligereza y su rigidez, han permitido que en las últimas décadas se hayan utilizado como sistemas estructurales de entramado en tubo, o tubo dentro de tubo, para los edificios en altura permitiendo, así, generar nuevas tendencias y estilos arquitectónicos de gran relevancia. Edificios como el *John Hancock Center* o la *Sears Tower* en Chicago (actualmente renombrado como la *Willis Tower*), obra del arquitecto **Bruce Graham** (1925-2010) y del ya mencionado ingeniero Fazlur Khan, la *New Hearst Tower* de **Norman Foster** (1935-) en Nueva York, o la sede de la Televisión Central de China (CCTV) en Beijing, diseñado por **OMA** (estudio de Remment Lucas Koolhaas (1944-)) y **Arup** (firma fundada en 1946 por Ove Nyquist Arup (1895-1988)), son algunos de los muchos ejemplos de estructuras de edificios en altura con estructura espacial de acero envolvente, de forma que se conforma una tipología estructural de entramado consistente en aprovechar las fachadas como elementos de contraviento.

Esta tipología estructural es especialmente eficaz en edificios en altura, ya que ofrece un buen comportamiento a flexión y a torsión, esfuerzos propios de este tipo de edificaciones. La ventaja que tal solución presenta reside en que los elementos de contraviento se disponen a la máxima distancia respecto al centro de resistencia del edificio, aumentando así su inercia y su rigidez torsional, mejorando significativamente la eficiencia estructural de los edificios en altura ^[11].

Este planteamiento en base a la optimización estructural está cada vez más extendido en el ámbito de la arquitectura, debido a los condicionantes económicos de las últimas décadas, dando lugar a uno de los principales objetivos en el diseño de los edificios: **la función resistente en base a la forma**. La necesidad de diseñar y construir edificios cada vez de mayor eficiencia estructural y más sostenibles energéticamente, a la vez que proyectar edificios de mayor interés estético, requiere de nuevas geometrías complejas que permitan obtener un buen proyecto arquitectónico que incluya un diseño estructural eficiente de acuerdo a las solicitudes que debe soportar adaptándose, a su vez, a las características formales y funcionales del edificio proyectado. Esta nueva forma de entender y concebir la arquitectura Postmodernista rompe con el diseño arquitectónico que carece de fundamento al tener como principal y, en muchas ocasiones, único objetivo ser un símbolo o icono.

Dada la complejidad en el diseño y la construcción que lleva implícita este tipo de proyectos, en base a novedosas geometrías, propias de los edificios de nueva generación, se deriva la necesidad de utilizar herramientas paramétricas de modelado compatibles con la tecnología y los programas más avanzadas de CAD, así como de análisis estructural. Estas nuevas y/o evolucionadas herramientas de trabajo, como las que se han utilizado para el desarrollo del trabajo de investigación realizado, han permitido cambiar los procesos de producción y los métodos de entrega en la industria de la Arquitectura, la Ingeniería y la Construcción (AEC, *Architecture, Engineering and Construction*). Modelado que se utiliza de forma frecuente en sectores como la industria de la automoción o de la aeronáutica ^[12].

[10] Eekhout, M. (1989). *Architecture in Space Structures*, p. 12.

[11] Señís, R.; Sastre, R.; Brufau, R.; Carbajal, E.C. (2014). *Estudio para la optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura según sus solicitudes, en base al análisis de sus líneas isostáticas*. [In press]

[12] Beucke, K.; Ranglack, D. (1993). *Computing with objects: What does industry hope to gain from it*, p. 102.

Dicha interacción lógica entre la arquitectura y la ingeniería se inició alrededor de los años 80 del precedente siglo, cuando se planteó que los edificios representaran y mostraran sus distintos componentes más allá de las líneas y los arcos como medios de representación convencionales utilizados hasta el momento. Actualmente, como indica Ibrahim ^[13], una nueva forma de presentación es posible gracias a la aparición de software dinámico BIM, «Modelado de Información de Construcción», (*Building Information Modeling*), que facilita la relación profesional arquitecto-ingeniero, a la vez que, permite hacer más eficiente el proceso para realizar un proyecto, disminuyendo así, la pérdida de tiempo en el diseño y la construcción.

Es por ello por lo que, dada la situación actual expuesta, es de gran importancia desarrollar un procedimiento de trabajo, como el que se propone en la presente Tesis, para obtener un adecuado planteamiento estructural, que permite abordar los problemas habituales implícitos en el diseño y el análisis de este tipo de estructuras. Es necesario, pues, atender aspectos de diseño que implique la obtención de una geometría estructural más óptima y eficiente, a la vez que se dé respuesta a las cuestiones formales y funcionales del edificio proyectado.

El volumen de proyectos que se basan en este concepto de optimización para mejorar su eficiencia estructural es digno de considerar. Obras de Antoni Gaudí Cornet (1852-1926) o Frei Otto (1925-) con formas basadas en la naturaleza, así como, los proyectos de Robert Maillart (1872-1940), Eugène Freyssinet (1879-1962), Pier Luigi Nervi (1891-1979), Ildefonso Sánchez del Río Pisón (1898-1980), Eduardo Torroja Miret (1899-1961), Ricardo Morandi (1902-1989), Félix Candela (1910-1997), Eladio Dieste (1917-2000), Sergio Musmeci (1926-1981), Heinz Isler (1926-2009), Mutsuro Sasaki (1941-) o Cecil Balmond (1943-) son algunos ejemplos de esta tendencia. Por ello, son muchos los estudios realizados sobre el **comportamiento estructural de acuerdo a la función estructural en base a la forma**. Algunos de los más relevantes han sido realizados por autores como Thompson ^[14], Mainstone ^[15], Gordon ^[16], Zannos ^[17], Salvadori y Heller ^[18], Ferre y Sakamoto ^[19], Otto y Rasch ^[20], Engel ^[21], Normann ^[22], Moussavi ^[23], Muttoni ^[24] o Mimram ^[25], entre otros, este último a propósito de la obra de Robert Le Ricolais (1894-1977).

Existe un número significativo de edificios arquitectónicos que se basan en este concepto y planteamiento de optimización según **la forma y la geometría**, el cual es válido para abordar el diseño y el análisis de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura, como se tratará en el desarrollo de la presente Tesis, con una clara intención continuista del trabajo de investigación avanzado por el autor ^[26], de acuerdo a la idea proyectual que se presenta en la figura 1.1-2.

^[13] Ibrahim, M. (2006). *To BIM or not to BIM, this is not the question: how to implement BIM solutions in large design firm environments*, p. 1.

^[14] Thompson, D.W. (2003). *Sobre el crecimiento y la forma*. Texto original de 1961.

^[15] Mainstone, R.J. (1975). *Developments in Structural forms*.

^[16] Gordon, J.E. (2004). *Estructuras o por qué las cosas no se caen*. Texto original de 1978.

^[17] Zannos, A.J. (1987). *Form and structure in architecture: The role of static function*.

^[18] Salvadori, M.; Heller, R. (1998). *Estructuras para Arquitectos*.

^[19] Ferre, A.; Sakamoto, T. (2000). *From control to design: Parametric/Algorithmic Architecture*.

^[20] Otto, F.; Rasch, B.; et al. (2001). *Frei Otto, Bodo Rasch: Finding Form*.

^[21] Engel, H. (2001). *Sistemas de estructuras*.

^[22] Normann Sandaker, B. (2008). *On span and space*.

^[23] Moussavi, F. (2009). *The Function of Form*.

^[24] Muttoni, A. (2011). *The Art of Structures. Introduction to the Functioning of Structures in Architecture*.

^[25] Mimram, M. (1983). *Structures et formes. Étude appliquée à l'œuvre de Robert Le Ricolais*.

^[26] Señis López, R. (2011). *Malles estructurals envolupants per edificis en alçada. Procediment paramètric per optimitzar la forma en funció de les seves sol·licitacions*. Tesina final de Màster.

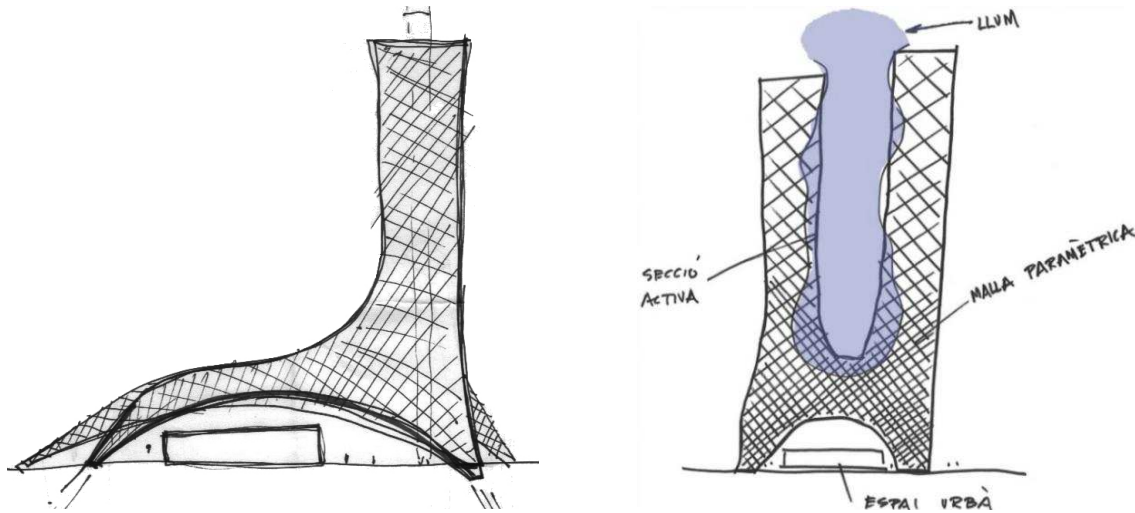


Figura 1.1-2. Bocetos para la propuesta de un proyecto de edificio en altura resistente en base a la forma y la geometría. (Imágenes propias, 2009).

Como se desprende de las imágenes de la figura 1.1-2, se planteó el esquema de un edificio en altura que fuera, en parte, resistente por su forma, así como por la geometría de la malla estructural envolvente. Cabe indicar que se tratan de unos primeros bocetos que fueron evolucionando de forma significativa a lo largo del transcurso del trabajo de investigación realizado, cuya resolución final, partió del concepto estructural del proyecto, presentado por el estudio de arquitectura e ingeniería estructural **SOM** (Skidmore, Owings & Merrill), del edificio *Lote Super Tower* en Seúl, cuya propuesta se muestra en la figura 1.1-3.

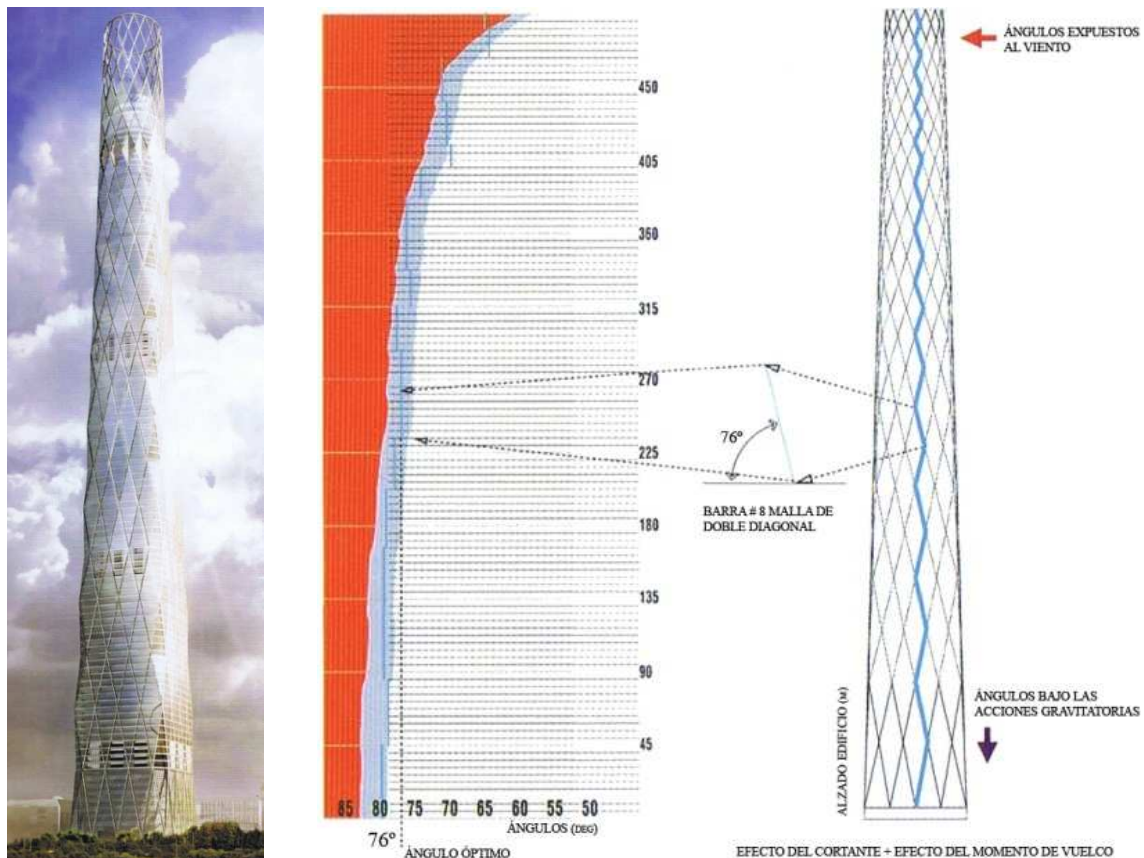


Figura 1.1-3. Propuesta del estudio SOM para el edificio *Lote Super Tower* en Seúl. (Notación adaptada de [Fernández-Galiano et al. 2010, 26 y 27]).

El proyecto *Lote Super Tower* en Seúl propuesto por SOM, se caracteriza por su diseño en base a la optimización estructural de acuerdo a la acción principal en este tipo de edificios: el viento, desde dos vertientes, **la forma del edificio** (que varía para mejorar su aerodinámica, como se aprecia en la figura 1.1-4) y **la geometría de la malla espacial envolvente de acero** (indicándose en azul la zona de mayor eficiencia estructural, y en rojo la zona de menor eficiencia, de acuerdo a la figura 1.1-3, previamente referida).

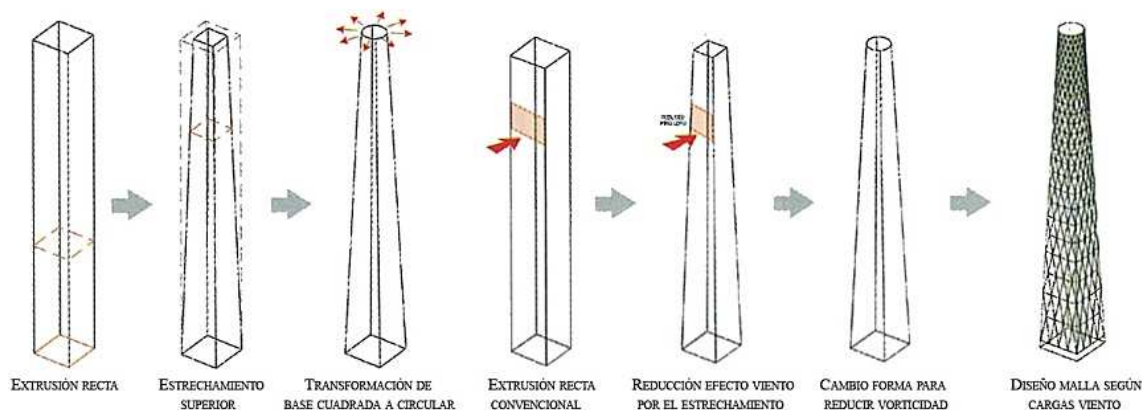


Figura 1.1-4. Evolución formal del edificio en altura *Lote Super Tower* en Seúl. (Notación adaptada de [Fernández-Galiano et al. 2010, 25]).

Conforme a esta primera referencia visual de un proyecto arquitectónico como ejemplo de optimización estructural en base a la forma y la geometría conjugándose, ésta, con la segunda referencia *Malles estructural envolupants per edificis en alçada: Procediment paramètric per optimitzar la forma en funció de les seves sol·licitacions* ^[27], permite proponer un planteamiento de optimización de estructuras envolventes de edificios en altura. Adaptando la geometría de dichas mallas según las direcciones de las tensiones principales identificadas por sus líneas isostáticas, entendidas como las envolventes de las direcciones principales de todos sus puntos, de acuerdo a las acciones solicitantes que actúan sobre los edificios.

Como se desprende de los trabajos, ponencias en congresos y publicaciones del autor, acerca de la optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura ^{[28][29][30]}, resulta relevante el estudio de las líneas isostáticas de un elemento resistente, en el diseño y el análisis de estructuras arquitectónicas, para mejorar su comportamiento y eficiencia estructural y, en definitiva, optimizarlas según sus solicitaciones principales, como el viento, en el caso de edificios en altura.

Es pues necesario en este caso que nos ocupa realizar un análisis avanzado, de acuerdo a las fuerzas y momentos producidos por la acción determinante referida: el viento. El objetivo principal es proyectar ya desde la estructura, en este caso, edificios caracterizados por su esbeltez geométrica y verticalidad, los cuales se sostienen con sistemas estructurales envolventes, para obtener geometrías resistentes más óptimas y eficientes según las acciones que deben soportar.

^[27] Señis López, R. (2011). Tesina final de Máster.

^[28] Señis López, R. (2013/a). *Estudio de las líneas isostáticas para optimizar mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura según sus solicitaciones*.

^[29] Señis López, R. (2013/b). *Isostatic lines' study to optimize steel space grid envelope structures for tall buildings according to their solicitations*.

^[30] Señis, R.; Sastre, R.; Brufau, R.; Carbajal, E.C. (2014). *Estudio para la optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura según sus solicitaciones, en base al análisis de sus líneas isostáticas*. [In press]

En este contexto, es de interés destacar la geometría de malla envolvente de doble diagonal que propone Moussavi ^[31], la cual se aprecia en la figura 1.1-5, y que secunda la primera parte de la investigación de mallas espaciales, según el planteamiento de optimización propuesto, en base a las líneas isostáticas que se generan de acuerdo a las cargas horizontales producidas, esencialmente por el viento. Siendo, estas cargas horizontales, de mayor intensidad en la parte superior de los edificios, y donde las esfuerzos de compresión, debido a las solicitaciones gravitatorias, son menores ^[31].

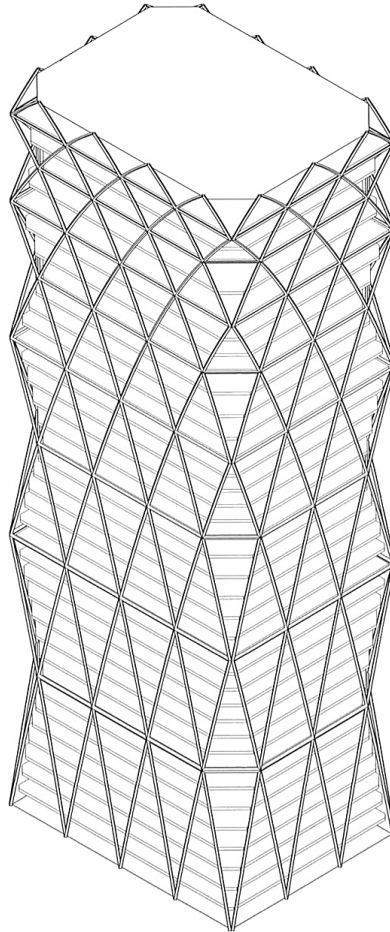


Figura 1.1-5. Propuesta de edificio en vertical con malla de doble diagonal optimizada según [Moussavi 2009, 104]).

Considerando este análisis bajo los puntos y referencias expuestos anteriormente, el estudio de las **líneas isostáticas para la optimización de estructuras** como criterio de diseño para mejorar la eficiencia de trazados de armaduras, así como la utilización de **mallas espaciales** como tendencia estructural de edificios en altura, en este trabajo se realiza un estudio comparativo para optimizar mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura adaptando la geometría a las líneas isostáticas del elemento resistente atendiendo a sus solicitaciones.

En definitiva, la temática que se aborda en la presente Tesis es establecer un procedimiento para obtener **estructuras resistentes de mayor eficiencia en base a su forma** que se caractericen por un diseño armónico, y lógico, que dé como resultado estructuras más óptimas, y por lo tanto con un coste económico y energético menor.

^[31] Moussavi, F. (2009). *The Function of Form*, p. 104.

1.2 Planteamiento, contenido del documento y exposición de objetivos

De acuerdo a los puntos expuestos, y la justificación en base a la relevancia de la temática que se aborda en la presente Tesis, el objetivo fundamental es establecer un procedimiento para la optimización de mallas estructurales de acero, envolventes de edificios en altura, como tipología estructural de entramado en tubo. Para ello, se realiza un estudio comparativo estructural, de acuerdo al análisis de las direcciones de las tensiones principales, para determinar si las mallas espaciales analizadas son más óptimas y eficientes cuando su diseño se adapta, o asemeja, a la trayectoria de las líneas isostáticas de los elementos estructurales equivalentes de alma llena, bajo las acciones solicitantes que deben resistir, a la vez que se atiende a las cuestiones arquitectónicas del proyecto.

Antes de abordar el análisis del comportamiento estructural tridimensional de las mallas o celosías espaciales como tipología estructural de edificios en altura, para su posterior comparación entre las geometrías convencionales y las posibles geometrías optimizadas, de acuerdo al planteamiento propuesto, en el capítulo 2 se realiza un estudio comparativo básico, en dos dimensiones, de distintas triangulaciones de vigas de celosía planas. Con ello se extraerán las conclusiones, según la relación entre su eficiencia estructural y la disposición de las barras que conforman el entramado de las armaduras en base a la identificación de la trayectoria de las líneas isostáticas de los elementos resistentes de alma llena equivalentes, necesarias para abordar el estudio final de mallas espaciales.

El estudio básico realizado, de eficiencia y comportamiento estructural, se implementa, posteriormente, en el análisis de estructuras espaciales de mayor complejidad. Los objetivos del estudio comparativo de vigas de celosía planas, previo al estudio de mallas espaciales, se exponen a continuación:

- Determinar la influencia de las distintas opciones de cálculo en el rendimiento estructural de vigas de celosía. En este estudio preliminar, se analizan las distintas triangulaciones consideradas para dos tipos de carga (puntual/distribuida).
- Determinar la influencia de los distintos parámetros de diseño de las vigas de celosía: tipo de triangulación, longitud y canto de la celosía, así como la configuración dimensional entre los montantes.
- Establecer que «parámetros de control» utilizados, considerando las deformaciones para ELS (flecha máxima admisible) y la resistencia admisible para ELU (perfiles estrictos), son válidos para determinar el rendimiento estructural y la eficiencia de las estructuras de entramado o de celosía.
- Determinar que triangulaciones o vigas de celosía ofrecen un mejor comportamiento o mayor rendimiento estructural y, en consecuencia, determinar que geometrías son más eficientes. Cabe destacar el especial interés en analizar las tipologías verticales en voladizo, equivalentes a edificios en altura.
- Determinar y cuantificar el rendimiento estructural de las distintas tipologías de celosías, cuando su geometría se adapta o se asemeja a la trayectoria de las líneas isostáticas del elemento estructural equivalente de alma llena.

Efectivamente, se establece la relación fundamental que conforman los conceptos básicos **geometría, forma y función estructural**, concepción que se aborda en este primer capítulo, de forma amplia para establecer el estado del conocimiento historicista, en base a dicha relación esencial, para el desarrollo del presente trabajo de investigación. Este punto de partida, justificativo del planteamiento de opti-

mización propuesto en base a la forma para el diseño de proyectos arquitectónicos de mayor eficiencia, es característico y propio de la Teoría de las Estructuras, lo que requiere de una búsqueda documental al respecto para determinar la influencia de la forma en el comportamiento estructural. Por lo tanto, de acuerdo a dicha búsqueda de la comprensión estructural, se establece inicialmente un hilo básicamente histórico que en el transcurso de su evolución se vayan desgranando las distintas vertientes formales de dicha relación.

Este concepto de optimización estructural utilizado, de acuerdo a la función estructural de la forma, permite abordar el estudio en edificios en altura, en base a las mallas espaciales como sistema resistente que conforman una tipología estructural de entramado en tubo, ampliamente utilizado en el ámbito de la arquitectura, como se expone y describe en los capítulos 3 y 4. Su utilización se debe a las elevadas prestaciones arquitectónico-estructurales que ofrece este esquema estructural, y la cual se caracteriza por la estrecha relación del binomio que conforman el diseño arquitectónico y el concepto estructural.

La búsqueda de conceptos relacionados con los edificios en altura se trata en los capítulos 3 y 4, como se ha expuesto previamente, donde se establece una sólida base para abordar el capítulo 5, en el cual, de acuerdo a los estudios comparativos estructurales finales realizados considerando el proceso de optimización propuesto, se concluye con una propuesta arquitectónica que engloba el concepto de «estética estructural» que se desprende de la concepción del mencionado binomio, conforme a los siguientes objetivos:

- Determinar la influencia en el rendimiento estructural de los parámetros de diseño que definen la geometría de estructuras de entramados en tubo, obteniendo, así, que triangulaciones permiten obtener mallas envolventes de edificios en altura más eficientes en base a las acciones actuantes.
- Profundizar en el diseño y el análisis de estructuras malladas, a la vez que se adquiere el dominio en el uso de herramientas paramétricas para el diseño de geometrías de estructuras complejas que tengan una importancia relevante dentro el concepto arquitectónico.
- Determinar si las mallas estructurales de acero, envolventes de edificios en altura, son más óptimas y si, en definitiva, mejoran su eficiencia cuando identifican la trayectoria de las líneas isostáticas del elemento resistente equivalente, generadas por las cargas actuantes.
- Establecer un procedimiento para la optimización de mallas estructurales de acero, envolventes de edificios en altura, según sus solicitaciones, de acuerdo al análisis de las direcciones de las tensiones principales y, consecuentemente, de acuerdo a las líneas isostáticas de tensiones.
- Estudiar la geometría más eficiente para proponer el diseño de un edificio en altura que se caracterice por la capacidad resistente de su forma, según sus solicitaciones.

De acuerdo a los objetivos previamente expuestos, en el capítulo 6, dedicado al análisis de los resultados obtenidos, se extraerán las conclusiones de los estudios comparativos realizados en base a la eficiencia estructural, determinando si las mallas espaciales o estructuras de entramado mejoran su eficiencia cuando se identifican con la trayectoria de las líneas isostática generadas por las acciones actuantes, en el caso que nos ocupa de edificios en altura, según la acción principal en este tipo de construcción, el viento. Así mismo, en este capítulo se formularán las posibles líneas de investigación que se derivan de las conclusiones expuestas.

1.3 Geometría, forma y función estructural

De acuerdo al concepto previamente expuesto, acerca de la concepción y el diseño de estructuras resistentes en base a su forma, en el presente capítulo se realiza un recorrido formalmente conceptual por la historia de la Teoría de la Estructuras, desde sus inicios hasta la actualidad, desde el punto de vista de la influencia, la relevancia y la función de la forma en el diseño, el comportamiento y el análisis de las estructuras. La relación entre la forma y la función estructural ha sido objeto de estudio por muchos científicos desde hace más de dos mil años, en busca de la comprensión resistente, (característica cuya relevancia requiere, a continuación, de un análisis propio dentro del contexto tratado).

Esta búsqueda, de la comprensión estructural en base al binomio función-forma, normalmente realizada desde una vertiente matemática y geométrica, permitió y permite entender, diseñar y analizar las distintas formas de las estructuras de las obras arquitectónicas. Como expone Ibáñez ^[1], una parte fundamental de la arquitectura son las Matemáticas y la Geometría, ya sea como fuente de inspiración y/o de creatividad, así como herramientas de cálculo para determinar el equilibrio o la estabilidad, a la vez que la resistencia y deformación de sus elementos. Implicando la forma, dan sentido al diseño estructural en todo proyecto.

Se concluye este primer capítulo, como consecuencia natural implícita en el referido binomio función-forma, abordando la búsqueda de estructuras basadas en las direcciones principales y las líneas isostáticas de tensiones como herramientas de diseño para, así, optimizar la forma resistente y determinar estructuras de mayor eficiencia, comenzando desde sus orígenes, considerando los métodos gráficos y analíticos derivados de la Estática Gráfica. Son muchos los autores que han basado y basan el diseño de sus proyectos en este concepto estructural, y por ello es deseable destacar en el inicio de este capítulo la cita de uno de los más relevantes maestros, dentro del ámbito de la construcción, el ingeniero **Eduardo Torroja Miret** (1899-1961), que dice así:

“La obra mejor es la que se sostiene por su forma y no por la resistencia oculta de su material.”

Eduardo Torroja Miret, citado por [Fernández Ordóñez et al. 1999, 49].

Concepto en base a la forma estructural al que Eduardo Torroja, especialmente en su obra *Razón y ser de los tipos estructurales* ^[2], añade la versatilidad y capacidad de adaptación, en este caso refiriéndose al hormigón armado como se describe a continuación, para adecuar la forma de la pieza al fenómeno tensional que debe soportar dicho elemento resistente obteniendo, así, un conjunto armónico entre los distintos elementos independientes resistentes que conforman el hormigón armado, configurando un nuevo material que resiste tanto a esfuerzos axiales de tracción como de compresión:

“Como, además, el encofrado permite variar el canto, e incluso el ancho si se quiere, la pieza de hormigón armado ofrece unas posibilidades de aprovechamiento y de adaptación al fenómeno tensional de cada caso en particular, difícilmente obtenibles con otros materiales.”

[Torroja Miret 1957, 2010, 127 y 128].

[1] Ibáñez Torres, R. (2003/04). *El vientre de un Arquitecto (la búsqueda de la forma)*, p. 155.

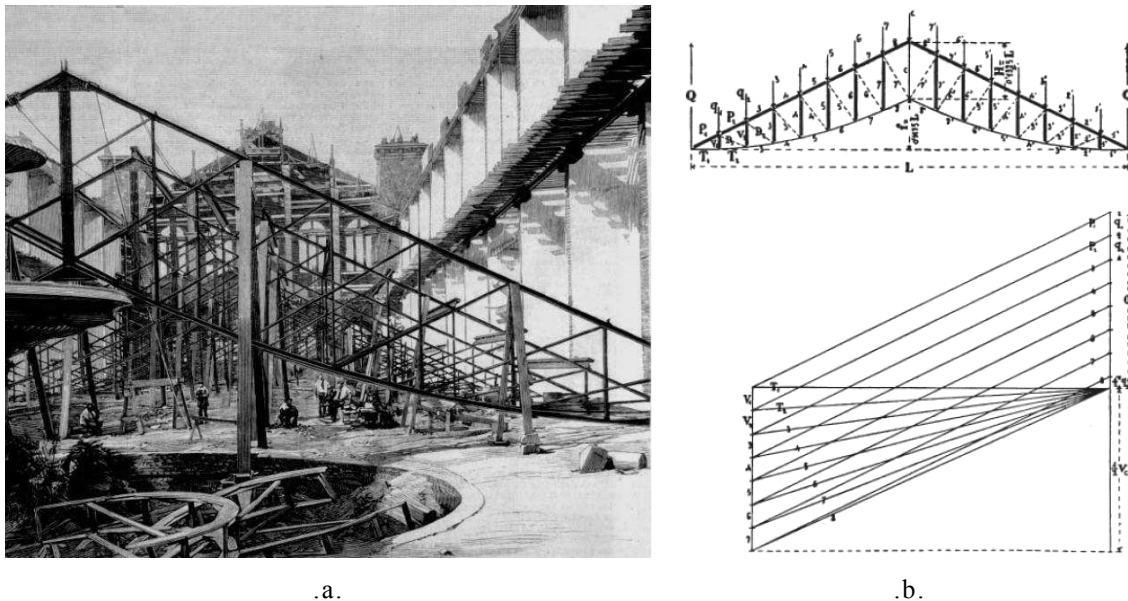
[2] Torroja Miret, E. (1957). Reimpreso en 2010 (3ª Edición).

De igual forma, incidiendo en este concepto, pero unos años antes, el arquitecto **Joan Torras Guardiola** (1827-1910), adelantándose en el tiempo, ya tuvo en cuenta en sus diseños estructurales la influencia de la forma y la geometría para un buen comportamiento estructural abogando por un trabajo armónico de todas sus partes, concepto que el propio Joan Torras Guardiola argumentaba así:

“[...] ¿Sabéis qué dirían las construcciones inarmónicas si pudieran hablar? Algunas de ellas harían un gran estruendo. Aquellos materiales que estuvieran trabajando en exceso, chillarían. Mientras, habría otros que dormirían a pierna suelta porque no deben hacer ningún esfuerzo, porque no hacen nada. En cambio, cuando en un edificio todos sus elementos trabajan por un igual, su canto, si por canto entendemos sus vibraciones mecánicas, sería tan armónico como una sinfonía [...]”

Joan Torras Guardiola (1888), citado por [Brufau Niubó 2011/b, 56].

La relevancia de las palabras de Torras Guardiola reside en que fue pronunciado hace casi ciento treinta años siendo, por ello, un precursor en busca de la optimización de estructuras, especialmente en vigas de celosía para obtener geometrías más ligeras y eficientes, concepto el cual describía como «vigas equilibradas», como se desprende de sus celosías con forma de «ala de mosca», tal y como se muestra en la figura 1.3-1.



formas conocidas que permiten obtener nuevas estructuras, realizando así con su obra una profunda reflexión acerca de los principios estructurales, estudiando las formas utilizadas en tiempos anteriores, para la obtención de nuevas tipologías estructurales, obra a la cual **Esteve Terradas Illa** (1883-1950) se refiere de la siguiente manera:

“Una de las ideas principales del libro es la siguiente: que de la forma de las estructuras, por una intuición especial, se pueden deducir las condiciones de trabajo y, en consecuencia, las de resistencia.

Los edificios clásicos, los esqueletos góticos y las cúpulas del Renacimiento se construyeron sin grandes cálculos; el espíritu, que el señor Cardellach quería ver más extendido, fue suficiente para crear construcciones sólidas y adecuadas. Ahora los libros de construcción vienen llenos de fórmulas y cálculos. El autor cree más en los procedimientos antiguos y lo explica en su libro para que la originalidad de arquitectos e ingenieros se desarrolle con mayor potencia.

En el libro, además de esto, se encuentran otras cosas muy interesantes, por ejemplo un examen bien historiado y completo de las estructuras actualizado; clasificaciones bien planteadas, comentarios precisos, etc., etc.”

Esteve Terradas Illa (1911), en referencia a la obra de [Cardellach Alivés 1910].

Estas primeras referencias, en esencia, contienen y abordan el concepto descrito anteriormente de la forma estructural, potenciando la relación existente entre **la forma y la función estructural**, a partir del estudio de las estructuras desde una visión geométrica aislada del estrictamente matemático para establecer, así, las leyes que, en este caso, rigen las propiedades de los materiales, y que ofrecen su estabilidad y resistencia, como menciona **Bonaventura Bassegoda Amigó** (1862-1940):

“En los cursos de historia del arte, cuando se estudian las manifestaciones artísticas que son su materia fundamental, cuando por el análisis se determinan las causas de estas manifestaciones, cuando se ha descrito sus evoluciones, cuando se deducen los principios generales de la estética, se hace penetrar poco a poco una educación especial, una sensibilidad artística que acaba por predisponer admirablemente el espíritu para la concepción de obras bellas. ¿No podría, pues, seguirse análogo camino en la enseñanza de las resoluciones mecánico-constructivas, analizando a este efecto todo cuanto conllevan de sentimiento innato, de inspiración y de intuición las obras arquitectónicas y las del arte del ingeniero concebidas por nuestros antepasados que nuestras estructuras actuales no hacen más que continuar? ¿No se haría así comunicar, como para el arte, una intensa sensibilidad mecánica, más desarrollada y más fructífera que la sensibilidad que se obtiene hoy día, por el análisis seco de las formas constructivas en su última evolución, cuya gestación y cuyo hallazgo han exigido centenares de generaciones?”

Bonaventura Bassegoda Amigó (1915), en referencia a la obra de [Cardellach Alivés 1910].

De igual forma Robert Brufau Niubó describe la relevancia del concepto de optimización de estructural desde la forma, como se infiere de la siguiente argumentación:

“Siempre que se quiere optimizar y aligerar una estructura, la opción más razonable es conseguir que sus elementos trabajen “por la forma”, minimizando el trabajo a esfuerzos flectores y cortantes, y potenciando el trabajo a esfuerzos axiales puros,

ya sean de compresión, ya de tracción. En la línea de buscar el trabajo “por la forma” a compresión destacaríamos las propuestas estructurales de gente como el español –establecido en México, cuando en su época dorada– Félix Candela (1910-1997), y el uruguayo Eladio Dieste (1917-2000).”

[Brufau Niubó 1998/99, 28].

En este mismo sentido, en base a la relación a la geometría-forma-función, destacar una de las reflexiones de Carlos Carbajal Navarro, la cual se transcribe a continuación:

“En síntesis, en palabras mayúsculas, es esta simbiosis entre la Geometría y la Forma, de alternancia dispar que, en minúsculas -poco a poco- a través del tiempo, unas veces geometría-forma otras forma-geometría, se va fundiendo (con permiso del lento, pero seguro, dominio y comprensión de las propiedades geométrico-estructurales de los materiales)... se va fundiendo, decía, en el crisol de la ciencia tecno-tecnológica ofreciendo no solo una rica amalgama de tipologías estructurales, sino también un resultado de valor incalculable de belleza exo-endogénica patente en la «estilización resistente» de la Estructura. En definitiva, esta reflexión, [*que suscribe el doctorando*⁴], es producto de una total interrelación entre el sentimiento elevado al máximo Arte y su propia expresión práctica en el día a día histórico, es decir, en la Arquitectura. Se justifica, pues, que el análisis que se presenta en este trabajo parta, no de un Estado del Arte básico sino, conjuntamente, de su interrelación con la propia evolución histórica de los elementos esenciales expresados mediante el triángulo fundamental (figura 1.3-2), cuyo baricentro, distorsionado, o no, es su optimización con el elemento material.”

[Carbajal Navarro 2013].

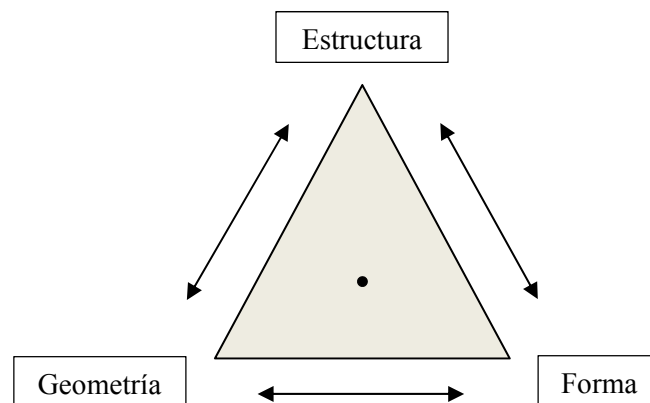


Figura 1.3-2. Representación virtual de las principales componentes de la interacción del concepto arquitectónico.

Este análisis, que se aborda a continuación, dará sentido al concepto de **optimización** de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura, pretendido en esta Tesis.

⁴ Reflexiones fruto de las largas, y tendidas, conversaciones mantenidas sobre la “clave” estructural.

1.4 La búsqueda de la comprensión estructural

Explicitando la relación fundamental en geometría-forma-estructura, concepción introducida al final del epígrafe anterior, resulta necesario establecer inicialmente un hilo básicamente histórico que en su extensión vaya desgranando las distintas vertientes formales de dicha relación. En este aspecto son muchos los científicos e investigadores que a lo largo de la historia han estudiado la Teoría de las Estructuras y fruto de ello, han surgido conceptos, ideas, principios y teoremas estructurales que son la base del diseño y el análisis estructural de la actualidad. Se hace, pues, necesaria una mínima, pero rigurosa, revisión evolutiva al respecto. Genéricamente, tiene su punto de partida en las geometrías, las composiciones y las bellas formas de la naturaleza, que intentaban analizar e imitar, ya en la antigüedad, los griegos y los romanos que realizaban sus obras de acuerdo a las leyes de la naturaleza. **Franz Joseph Ritter von Gerstner** (1756-1832) describe esta habitual práctica de la siguiente manera:

“Por lo tanto, tenemos que en la Mecánica simplemente hay que observar exactamente las leyes de la Naturaleza, examinar con la debida atención las propiedades de los objetos a procesar, y por lo tanto, buscar los medios más adecuados para lograr nuestros trabajos.”

Franz J. R. von Gerstner (1831/1833), citado por [Kurrer 2008, 161].

Como expone Millais ^[1], «la búsqueda de la comprensión estructural» a lo largo de los siglos, como se infiere de las referencias gráficas de **Edoardo Benvenuto** (1940-1998) de la figura 1.4-1, se remonta a la época de los filósofos griegos, con los primeros estudios de Mecánica, cuando surge la idea de las explicaciones lógicas y racionales, a cargo de **Platón** (427 a.C.-347 a.C.) que creía que las matemáticas son la mejor herramienta para la búsqueda del conocimiento. La aportación de Platón fue de tal importancia y relevancia que estableció la base de la Mecánica ^[2].

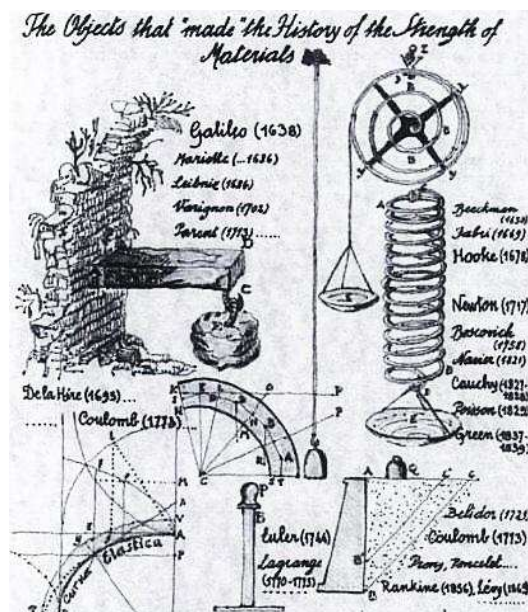


Figura 1.4-1. Referencias gráficas de la *Associazione* Edoardo Benvenuto. (Imagen tomada de [Kurrer 2002, 16]).

[1] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 6.

[2] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 30.

Aristóteles de Estagira (384 a.C.-322 a.C.), discípulo de Platón en la Academia de Atenas, escribió el primer libro de Física y numerosos tratados de distintos temas (se estima que escribió más de doscientos aunque solo hayan perdurado treinta y uno), que permanecieron en uso hasta la aparición de nuevas ideas y conocimientos en física, astronomía y biología, entre otros campos, de la Revolución Científica (siglos XVI y XVII). Así mismo, Aristóteles también dedicó algunos estudios a la Mecánica, pero dichos conocimientos no tuvieron buena aceptación por parte de los renacentistas y no se incluyeron en la Mecánica de **Galileo Galilei** (1564-1642)^[3]. Su entusiasmo por el estudio de la anatomía y estructura de los seres vivos, fue tal, que puede considerarse el primer biomecánico^[4].

Sin embargo, fue el filósofo griego, gran matemático y físico, **Arquímedes de Siracusa** (287 a.C.-212 a.C.), quien estableció las bases de la Estática como describe Camilo Doria Martí:

“[...] (Arquímedes de Siracusa) fue el primer investigador que relacionó las deducciones matemáticas con los resultados experimentales, encontrando así leyes fundamentales de la Estática, de la que pudiera considerársele su fundador. Arquímedes dio a conocer, en términos matemáticos, las leyes de la palanca.”

[Doria Martí 1983, 31].

Por ello, se le considera el fundador de la Teoría de la Mecánica, en base a algunos de sus tratados: “Equilibrio de los planos” o “Las leyes de la palanca”, entre otros. Fueron muchos los descubrimientos de Arquímedes como matemático, físico, ingeniero, inventor y astrónomo, y que tuvieron una gran trascendencia en la Ciencia a lo largo de los siglos posteriores, principalmente más por sus inventos que por sus escritos matemáticos, ya que no se realizó una compilación integral de sus obras hasta el año 530 d.C., a cargo de Isidoro de Mileto. Se dio a conocer al público más amplio con los comentarios escritos, también en el siglo VI, por Eutocio referido a la obra de Arquímedes^[5]. Sin duda, fue un científico muy conocido, especialmente, por pronunciar la célebre frase que Karl-Eugen Kurrer cita en su libro:

“Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo.”

Arquímedes, citado por [Kurrer 2008, 41].

Arquímedes sentenció con esta sutil contundencia visual virtual, como se ilustra en la figura 1.4-2, para exponer y mostrar el principio de las «leyes de la palanca».

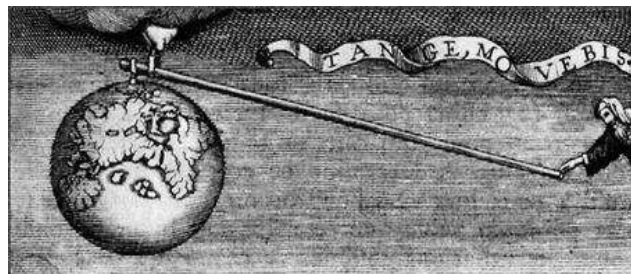


Figura 1.4-2. Arquímedes apalancando el mundo con una bisagra.
(Imagen tomada de [Rühlmann 1885, 20]).

[3] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 31.

[4] Bruce Martin, R. (1999). *A Genealogy of Biomechanics*, p. 2.

[5] Heath, T.L. (1897). *The works of Archimedes*, pp. xi-xxx.

En la figura 1.4-3, se muestran las condiciones de equilibrio de dos fuerzas de acuerdo a la ley de la palanca dando a conocer por primera vez, “en términos matemáticos, las leyes de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre una palanca”^[6], y que presenta por medio de tres axiomas, junto con otros estudios acerca de centros de gravedad^[7], en su libro *De Aequiponderantibus*.

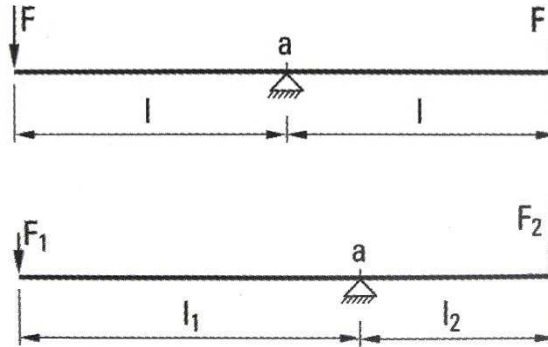


Figura 1.4-3. Principio de las «leyes de la palanca» según Arquímedes. (Imagen tomada de [Kurrer 2008, 42]).

Estos estudios hicieron que Arquímedes fuera la persona más popular asociada a la palanca, pero no fue el único que se interesó y estudió acerca de ella. Algunos de sus predecesores como fueron Platón, Aristóteles, así como Estratón (340 a.C.-268 a.C.), discípulo de Aristóteles, ya habían planteado teorías y principios sobre esta máquina simple. Incluso Aristóteles había escrito acerca del principio de los «desplazamientos virtuales», utilizando ejemplos con palancas, que se pueden encontrar en su obra *Quaestiones Mechanicae*. Además, no hay que olvidar que los egipcios ya tenían grandes conocimientos relativos a la palanca, al plano inclinado, así como de la cuña, herramientas que les permitieron realizar las majestuosas pirámides. Pero fue Arquímedes quien, por primera vez, precisó la formulación para expresar matemáticamente el fenómeno de equilibrio del principio de la palanca, basándose en la experiencia de la práctica y conocimientos de los siglos predecesores^{[6][7][8]}.

Las teorías griegas, que establecieron los fundamentos de la Estática, fueron seguidas por los romanos y perduraron a lo largo de la Edad Media, especialmente los conocimientos fundamentales descritos por Arquímedes, pero fue una época sin ninguna aportación relevante, y no hay constancia de que se realizaran avances significativos, a la Ciencia en general y a la Teoría de la Mecánica en particular, quizás debido a que sus conocimientos no perduraron a la invasión de los bárbaros^{[6][9]}.

A los romanos, los cuales desarrollaron los arcos, también se les atribuye sus grandes dotes para realizar grandes monumentos y templos, así como carreteras, puentes y fortificaciones. Obtuvieron la mayor parte de estos conocimientos y sus métodos de los diez libros que componen el tratado *De Architectura*, obra del arquitecto, escritor e ingeniero romano **Marco Vitruvio Pollio** (80-70 a.C.-23 a.C.), que se estima que se escribió entre los años 27 y 23 a.C. Se conocen como los primeros documentos relacionados con los materiales de la construcción y tipos estructurales, con los que se transmitieron las técnicas para la arquitectura y la ingeniería del helenismo. En su obra se describen los materiales estructurales, las proporciones

[6] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, pp. 31 y 32.

[7] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 42.

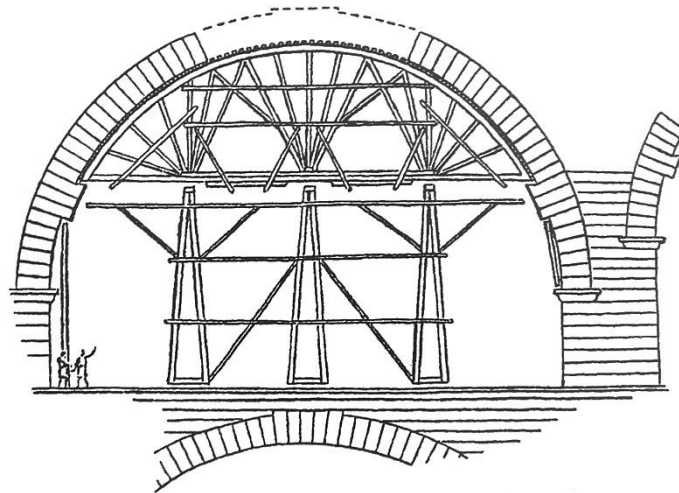
[8] Dijksterhuis, E.J. (1956). *Die Mechanisierung des Weltbildes*, pp. 34-36.

[9] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 1.

geométricas y los sistemas constructivos utilizados en aquella época, como eran los arcos que utilizaban en sus construcciones, como en el caso del el acueducto *Pont du Gard* sobre el río Gard que se muestra en la figura 1.4-4a, con un vano central que mide de 25 metros ^{[10][11][12][13][14]}.



.a.



.b.

Figura 1.4-4. a) *Pont du Gard*, b) Cimbra hipotética en el vano central para su construcción según John Fitchen (1879-1963). (Imágenes tomadas de [Timoshenko 1953, 1983, 3] y [Heyman 2001, 43] respectivamente).

Posteriormente a la civilización romana, tuvieron que pasar prácticamente mil años, época reconocida como Edad Media, producto de la invasión bárbara en el mundo occidental, para que se retomaran los conocimientos fundamentales de Arquímedes y se hicieran nuevas aportaciones a la Estática ^[15]. No fue hasta el siglo XIII, cuando se publicó el tratado matemático *De Numeris Datis*, que fue el primer tratado de álgebra escrito en Europa, obra del misterioso **Jordanus Nemorarius** (?-1237), autor del cual se tiene poca información sobre su persona ^{[16][17]}. Jordanus

[10] Aguayo, C.; Castillo, F.; González, I.; Peña, G.; D'Angelo, E. (2007). *Marco Lucio Vitruvio Polión*, p. 2.

[11] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 43.

[12] Oyarzun, F.P.; Sato, A.; Aravena, A.; Quintana, J. (1999). *Los hechos de la arquitectura*, p. 32.

[13] Salvadori, M.; Heller, R. (1998). *Estructuras para Arquitectos*, p. 84.

[14] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 1.

[15] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 43.

[16] Duhem, P.M.M. (1905). *Les origines de la Statique*, pp. 98-155.

[17] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 6.

Nemorarius, conocedor de los conceptos matemáticos y geométricos del griego **Euclides** (325 a.C.-265 a.C.), formuló la «ley del plano inclinado», además de definir el principio del «trabajo virtual» (o de las «velocidades virtuales») con el que intentó demostrar el principio de la palanca y de la ley de fuerzas que Aristóteles propuso en el siglo IV a.C., ^{[18][19][20]}. Su principio, que precedió la investigación de la conservación de la energía, fue de gran influencia en la Edad Media y el Renacimiento, pero además, sus conocimientos fundamentales de Matemáticas y Mecánica que le permitieron resolver los problemas de equilibrio, contribuyeron de forma esencial al desarrollo de los principios energéticos que se llevaron a cabo en el siglo XIX, en relación con la Teoría de las Estructuras, en el marco de la Estática y la Teoría de la Elasticidad ^[21].

La mayor parte del conocimiento, en el campo de la ingeniería estructural de los griegos y de los romanos, pasó, prácticamente, desapercibido durante el transcurso de la Edad Media, y no fue recuperado hasta siglos más tarde, a cargo de los científicos e investigadores del Renacimiento. No obstante, el francés **Pierre Maurice Marie Duhem** (1861-1916) investigó acerca de la Mecánica y Física de la Edad Media, especialmente la obra de los escolásticos medievales y pudo asociar varios nombres como son Jordanus Nemorarius, Jean Buridan, Nicole Oresme, Richard Swineshead, William Heytesbury entre otros, a descubrimientos, conocimientos fundamentales y teoremas muy concretos, ^[22].

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, ningún cambio relevante se manifestó antes del Renacimiento, siendo preciso llegar a Leonardo Da Vinci (1452-1519), Simon Stevin (1548-1620), Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Blaise Pascal (1623-1662), Isaac Newton (1642-1727), entre otros ^{[23][24]}. El máximo exponente de ésta prolifera época fue el científico **Leonardo da Vinci** (1452-1519). Por desgracia, sus avances, no fueron recuperados hasta cien años más tarde por Stevin y Galileo, que entre otras cosas investigaron sobre aspectos del comportamiento estructural. Leonardo da Vinci contribuyó, con su legado, de una forma notable a la historia de la Ciencia, aunque parece ser que, en sus cuadernos dejó constancia de notas, ideas y contribuciones de otros inventores de su época, así como de épocas anteriores, junto con sus inventos y experimentos, que Leonardo da Vinci tuvo en cuenta en sus estudios ^[22] como, por ejemplo, la obra de Nemorarius que se muestra en la figura 1.4-5.

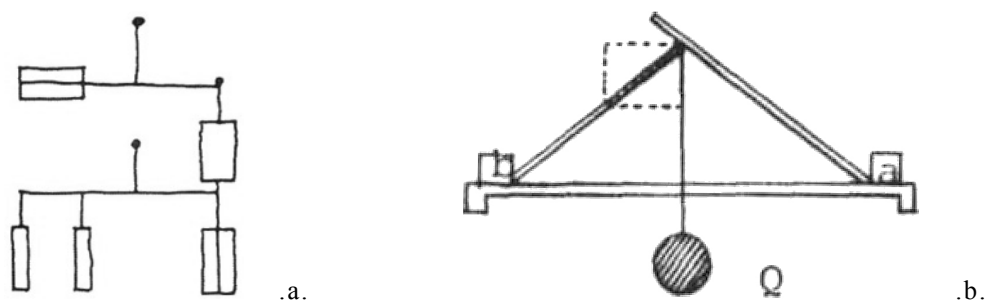


Figura 1.4-5. Diagramas de Nemorarius (a) y de Leonardo da Vinci (b). (Imágenes tomadas de [Millais 2005, 6] y [Cervera Bravo 1982, 29] respectivamente).

[18] Dugas, R. (1955). *A history of mechanics*, pp. 98-155.

[19] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 106.

[20] Ramme, W. (1939). *Über die geschichtliche Entwicklung der Statik in ihren Beziehungen zum Bauwesen*, pp. 15-17.

[21] Duhem, P.M.M. (1905). *Les origines de la Statique*, pp. 98-155.

[22] Truesdell, C. (1975). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*, pp. 21 y 41.

[23] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 32.

[24] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 1.

Leonardo da Vinci, independientemente de su indiscutible maestría como pintor, fue arquitecto, ingeniero e inventor, entre otras inquietudes técnicas de su interés, y se le atribuye el enunciado de la idea de momento estático, para aplicaciones de equilibrio. Fue quien realizó varios manuscritos con dibujos de numerosas experiencias gráficas, que contribuyeron a la comprensión de las estructuras, como son: la estática de las vigas, de los pilares, de los arcos y de las cúpulas ^[25], entre otros. Leonardo da Vinci fue el primero en formular las observaciones cruciales del comportamiento de vigas a flexión, situando correctamente la línea neutra, así como estableció, la distribución de deformaciones de las fibras de la sección ^[26], como se aprecia en la figura 1.4-6a, y que argumenta, Leonardo da Vinci, como sigue:

“Si una barra flexible se dobla, es necesario que su parte convexa se adelgace, y que su parte cóncava se ensanche.

Esta deformación es piramidal, y en consecuencia, no hay cambios en el centro de la barra. Se podrá descubrir, si se tiene en cuenta las anteriores modificaciones, que, considerando al tramo $a-b$ en el centro de su longitud, y haciendo flechar, entonces, la barra de manera que, en la base, las dos secciones paralelas a y b se aproximen, la distancia entre ellas habrá crecido en las fibras superiores en la misma medida que habrá disminuido en las fibras inferiores. En consecuencia, el centro de su altura se habrá comportado como un fulcro (pívot).

Los puntos extremos de las fibras superiores se aproximen en la misma proporción que se alejan los puntos extremos de las fibras inferiores. Por esta razón, se comprende que el centro de la altura de las secciones paralelas nunca crece en $a-b$ ni disminuye en $c-d$ una vez se ha deformado la barra.”

Leonardo da Vinci (1493/a), texto adaptado por [Brufau Niubó 2004/a, 26].

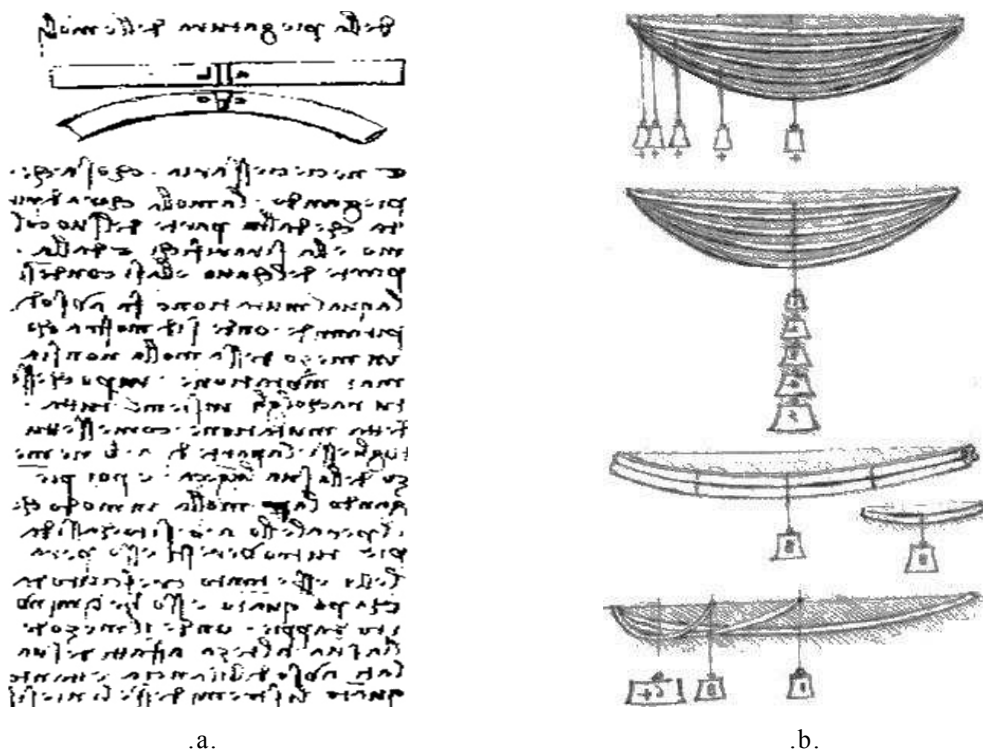


Figura 1.4-6. Dibujos de vigas a flexión de Leonardo da Vinci. (Imágenes tomadas de [Leonardo da Vinci 1493/a, 1974/a, folios 84 y 137] respectivamente).

^[25] Truesdell, C. (1975). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*, p. 26.

^[26] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 26.

Como expone Truesdell ^[27], Leonardo da Vinci centró su trabajo sobre la Mecánica, en gran parte, en estudiar el comportamiento de los elementos que componen las estructuras: vigas, pilares, arcos y bóvedas, ya que el conocimiento de estos elementos era esencial para el desarrollo de los proyectos de la construcción. Fue el primero en describir el fenómeno de la deformación, como se muestra en la figura 1.4-7, y que argumentaba de la siguiente manera:

“La resistencia de una viga es proporcional a su sección recta. [...] Si la carga superpuesta estuviese más cercana de un punto de apoyo que el otro, el soporte se doblará por el lado opuesto al que se aplica la carga, y se romperá por el lado opuesto, es decir, por la parte más lejos de los extremos.”

Leonardo da Vinci (1493), citado por [Truesdell 1975, 31].

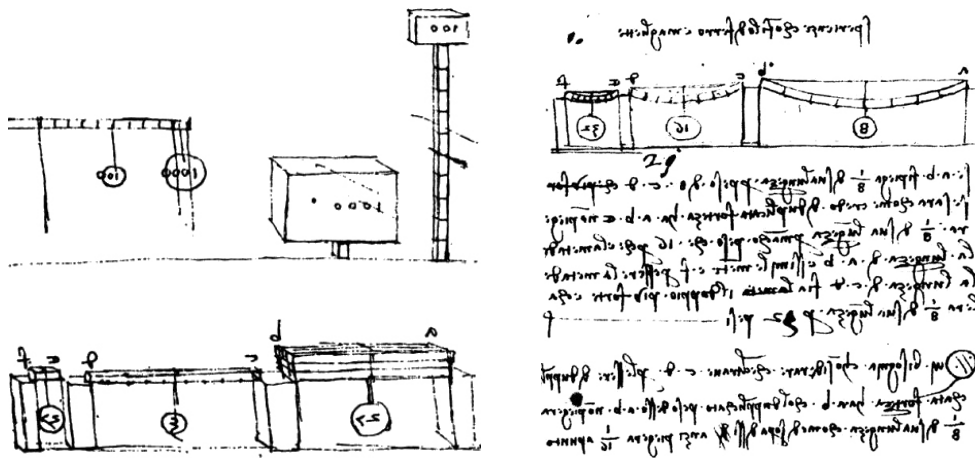


Figura 1.4-7. Estudios de Leonardo da Vinci de la flexión de una viga apoyada en ambos extremos. (Imágenes tomadas de [Truesdell 1960, 21] y [Truesdell 1975, 28] respectivamente).

Por todas sus investigaciones y aportaciones, Leonardo da Vinci es reconocido como símbolo del hombre del Renacimiento, genio universal, pero por desgracia, sus conocimientos fueron desaprovechados durante más de cien años. El motivo de dicha situación se debe a varias razones, pero fundamentalmente se debe a la forma de trabajar de Leonardo da Vinci, que no era la más adecuada para transmitir de forma clara sus aportaciones e inventos, ya que sus cuadernos estaban formados por apuntes fragmentarios, que carecían de orden, tanto de inventos suyos, como de observaciones que hacía o comentarios que oía y que quería recordar, generando confusión ^{[27][28]}. Es por ello por lo que, los historiadores de los siglos XVI y XVII no siguieron con interés los trabajos teóricos sobre Mecánica, hasta que surgió la figura de dos reconocidos investigadores, anteriormente mencionados: Stevin y Galileo, que retomaron los estudios de comportamiento estructural. Esta falta de interés hacia la Mecánica se produjo durante varios siglos, hasta el punto que el reconocido físico y matemático **Joseph Louis de Lagrange** (1736-1813) escribió el 1788 la siguiente reflexión:

“[...] El intervalo que separa Arquímedes de Galileo desaparece de la Historia de la Mecánica.”

Joseph Louis Lagrange (1788), texto adaptado por [Brufau Niubó 2004/a, 28].

^[27] Truesdell, C. (1975). *The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788*, pp. 21, 26 y 31.

^[28] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 28.

Simon Stevin (1548-1620), también conocido como Simón de Brujas, fue, fundamentalmente, un matemático muy influenciado por la obra de Arquímedes. Tuvo un papel destacado en el ámbito de la física, especialmente en el campo de la Estática, retomando la teorización y experimentación para la búsqueda de la comprensión del comportamiento estructural. Para ello, realizó inventos de gran relevancia como, por ejemplo, el artificio que ingenió para demostrar la «ley de los planos inclinados» con una cadena colgando alrededor ^{[29][30]}, mostrado en la figura 1.4-8a. Con dicho mecanismo, determinó la imposibilidad de movimiento desde un estado de reposo, así como la inviabilidad de movimiento continuo de acuerdo al axioma de inicio, el cual propone que el movimiento perpetuo de la cadena es imposible. Con ello, se dio un gran avance, con la publicación, en 1586, de su obra, *De Beghinselen der Weeghconst*, que incluye sus libros *De Weeghdaet* y *De Beghinse-len des Waterwichts* ^[31], en la descripción del concepto del equilibrio de fuerzas de dos planos inclinados según un triángulo que satisface, de acuerdo a la figura 1.4-8c, la siguiente relación:

$$G_1/G_2 = S_1/S_2 \quad (1.4.1)$$

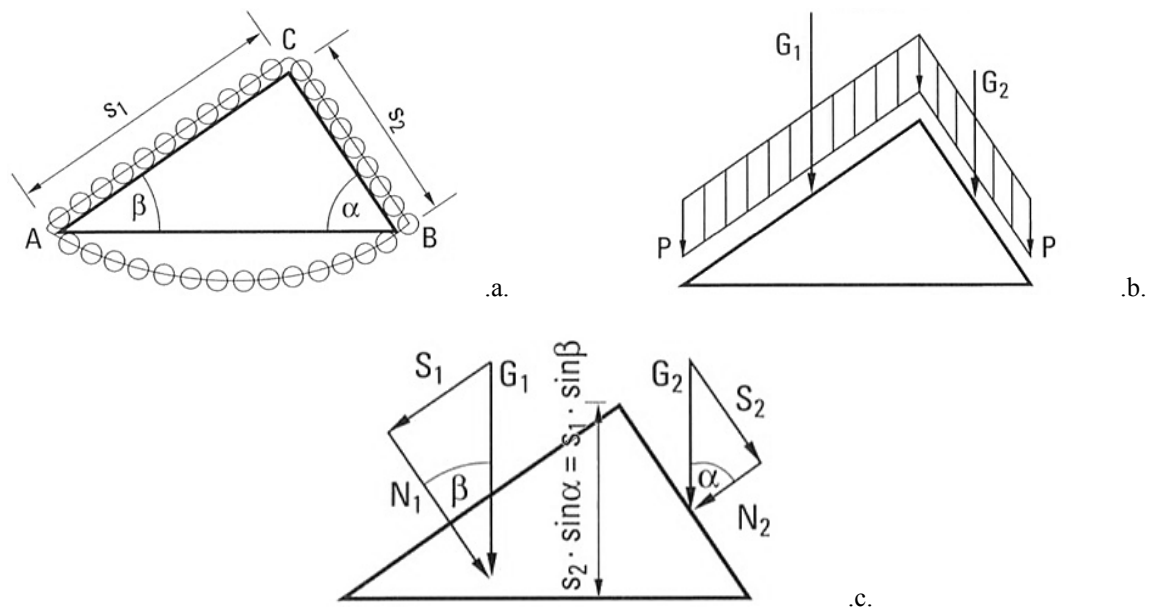


Figura 1.4-8. Equilibrio de dos planos inclinados según Stevin. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 45]).

Stevin explicó el equilibrio de la ley del plano inclinado utilizando catorce bolas que colgaban de una cadena. Dos apoyaban sobre un plano y cuatro sobre el otro, de forma que las ocho restantes colgaban libremente. De sus deliberaciones con la cadena colgando surgió el paralelogramo de fuerzas, a la vez que dibujó la primera catenaria de la que se tiene constancia, mostrada posteriormente, como se desprende de su publicación *L'art pondénaire ou la statique* ^[32], en 1634, con el equilibrio de fuerzas en el polígono funicular con pesos colgados de un hilo, iniciando, así, el análisis del equilibrio de sistemas estructurales ^[33].

[29] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 138.

[30] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 32, 44 y 765.

[31] Stevin, S. (1586).

[32] Stevin, S. (1634). Reimpreso en 1987.

[33] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 56.

En acepción a Block, DeJong y Ochsendorf ^[34], los procedimientos expuestos por Stevin, se explicitan en la introducción del paralelogramo de fuerzas, “el equilibrio del cual, podía ser descrito gráficamente utilizando del vector de fuerzas y el polígono cerrado de fuerzas. Así fue posible explicar resultados experimentales como el de los pesos colgando de una cadena y «calcular» las fuerzas actuantes en dicha cadena, utilizando los métodos gráficos”, estableciendo de esta forma, además del inicio del análisis del equilibrio de sistemas estructurales, las bases de los métodos gráficos de la Estática Gráfica, los cuales se describen posteriormente, y que Camilo Doria Martí argumenta consecuentemente:

“Los mismos procedimientos que le llevaron a establecer la relación entre la carga, la altura del plano inclinado y su longitud, fueron los que le permitieron formular en 1585 el principio general del paralelogramo de las fuerzas. [...] Desde entonces, el principio del paralelogramo de fuerzas se ha convertido en un indispensable instrumento de trabajo de la Estática, debido a sus consecuencias e innumerables aplicaciones.”

[Doria Martí 1983, 138 y 139].

Galileo Galilei (1564-1642) centró su trabajo en las matemáticas y la física, revisando los tratados de Arquímedes, en base a la experimentación, lo que le permite descubrir, entre diversas aportaciones de alta relevancia, las leyes del péndulo. Fue el científico renacentista por excelencia, hasta el punto de ser considerado el padre de la Mecánica y la Biomecánica. También estableció el punto de partida de la Teoría General de la Flexión y de la ciencia de Resistencia de Materiales ^[35], como se desprende de su publicación en 1638 en Leyden (Holanda), de su tratado *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti local* ^[36]. Como indica Heyman ^[37], en este texto introdujo el concepto de resistencia a flexión de una viga en voladizo, mostrado en la figura 1.4-9a.

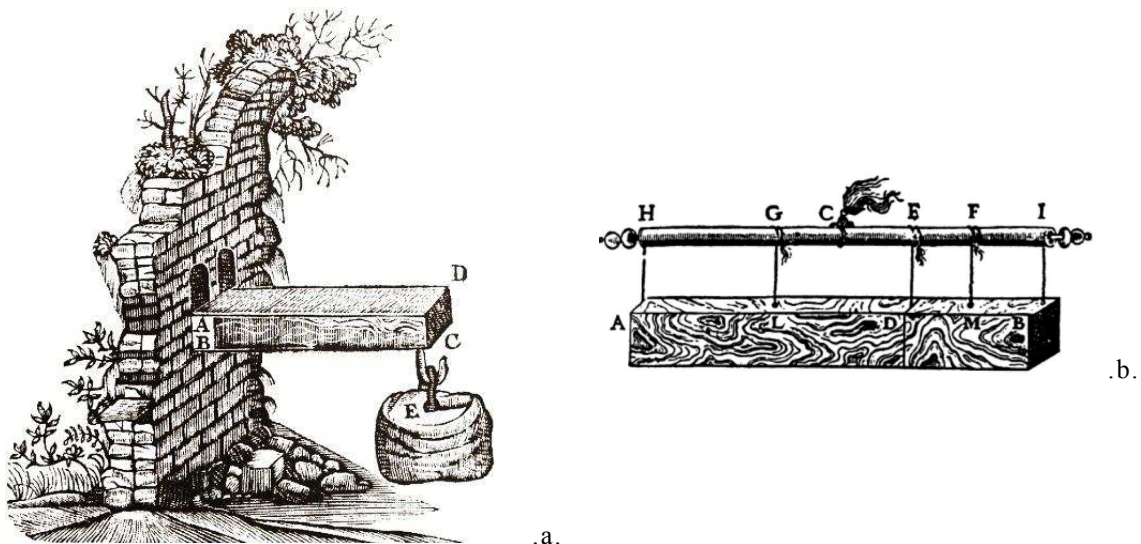


Figura 1.4-9. a) Abstracción de una viga en voladizo de Galileo (1638), b) Esquema de Galileo para explicar la «ley de la palanca». (Imágenes tomadas de [Wells 2010, 78] y [Heyman 2004, 12] respectivamente).

[34] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.

[35] Guerra Fontana, R. (s.f/b). *Teoría general de la flexión*, p. 12.3.

[36] Galilei, G. (1638).

[37] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 11.

Galileo estableció la relación entre las dimensiones de la viga de acuerdo a la carga que podía resistir basándose en la «ley de la palanca» de Arquímedes, como se muestra en la figura 1.4-9b, para intentar descubrir el mecanismo interno de la viga. Sus dibujos fueron fuente de inspiración para muchos otros científicos y matemáticos ^[38]. A partir de dos de sus célebres dibujos originales, (páginas 114 y 118 de su citada obra), estableció las relaciones entre geometría y carga de rotura de la viga, de acuerdo al siguiente enunciado:

“[...] Sea un prisma (viga) horizontal $ABCD$, empotrado en un muro por la cara AB , y con una carga E suspendida en el extremo CD . Es manifiesto que, si se ha de romper, lo hará por el punto B , donde se producirá el fulcro (pívot) de la palanca del brazo BC , mientras que el otro brazo de la palanca es el propio grueso del sólido (AB). En este segundo brazo se producirá la “resistencia”, que será la que se opondrá a que se separe la parte del sólido que esté fuera del muro respecto a la que está dentro. Por lo dicho, el momento que hay en AB , considerando como brazo relativo de esta palanca, no obstante, la mitad del grueso AB [...]”

Galileo Galilei (1638), citado por [Brufau Niubó 2004/a, 10].

Galileo intentó resolver el problema que había planteado acerca de la teoría de las vigas, para así poder calcular mediante análisis estructural el máximo momento flector de una viga en ménsula. Determinó, aparentemente, desde el punto de vista del comportamiento elástico del material, una distribución de tensiones errónea al considerar que dicha distribución sería constante o uniforme en toda la sección de la barra, como se muestra en la figura 1.4-10b, al suponer que la rotura se produciría en la fibra inferior de la sección. Aun así, a él se le atribuyen los primeros intentos para desarrollar dicha teoría y establecer las bases de la Resistencia de Materiales ya que, para resolver dicho problema, combina el cálculo de Teoría de Estructuras con el cálculo de Resistencia de Materiales ^[38].

Por lo tanto, como expone Carbajal ^[39], y de acuerdo a lo anteriormente tratado, el análisis del comportamiento estructural que inició Galileo, se considera el comienzo de la Resistencia de Materiales. En su explicación, Carlos Carbajal Navarro además expone el planteamiento erróneo de Galileo para el caso de una viga en ménsula, y dice así:

“La Resistencia de Materiales debe su nacimiento, como es sabido, a Galileo Galilei (1564-1642), [...], mediante el planteamiento inicial de un problema estructural, determinación de la carga de rotura, de una viga en ménsula a flexión simétrica, de longitud L , para el caso de que la carga fuese puntual, P , situada en su extremo libre, que desemboca directamente en un problema de Resistencia de Materiales, dada la determinación estática del problema. La solución a la que llega Galileo, para una sección rectangular $b \times h$, $P.L=1/2N.h$, siendo $N = \sigma_u.bh$ la resistencia absoluta a tracción de la viga, no es en sí correcta, ya que la solución correcta debería ser $P.L=1/6N.h$. La razón es que Galileo asimiló implícitamente el problema a una distribución uniforme de tensiones de rotura, σ_u , a tracción en el extremo del empotramiento, mientras que se trata realmente de una distribución de tensiones bi-triangular tracción-compresión idénticos, en el caso más básico, es decir con la posición de la fibra neutra en eje de la viga, y no en el infinito. La figura adjunta, [...] (figura 1.4-10), muestra una esquematización de este problema y los correspondientes diagramas de tensiones normales, (b) erróneo, (c) correcto.”

[Carbajal Navarro 2012, 4 y 5].

^[38] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 9 y 11.

^[39] Carbajal Navarro, E.C. (2012). *Contribución a la definición de un modelo teórico del proceso de fatiga por alto ciclaje en materiales dúctiles*.

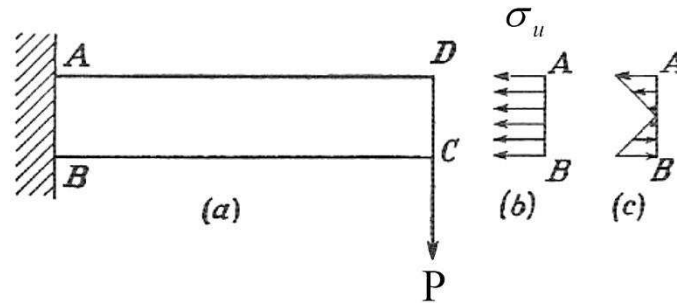


Figura 1.4-10. Interpretación de las distribuciones de tensiones de rotura. (Notación adaptada de [Timoshenko 1953, 1983, 12]).

Por lo tanto, Galileo realizó una hipótesis errónea, debido a que, en acepción a Heyman^[40], “está considerando el equilibrio de momentos de una palanca en ángulo”, y para una ley uniforme de tensiones, y que en notación moderna se expresa como:

$$P \cdot L = k \cdot S \cdot h \quad (1.4.2)$$

donde,

S , es la resistencia absoluta de la sección rectangular de ancho b y altura h , es decir, $S = b \cdot h \cdot \sigma$ mientras que k , de acuerdo a la hipótesis de Galileo, toma el valor de $1/2$.

Es decir, el error de Galileo está en el hecho de que, indistintamente de no tener en cuenta la forma de la sección (no absolutamente prioritario, aunque debería haberlo mencionado), toma la distribución de tensiones uniforme de forma que considera el par para una distancia de $h/2$, sin plantear estrictamente las condiciones de equilibrio estático, para un axil $N = b \cdot h \cdot \sigma$, lo que le lleva a establecer que $P \cdot L = N \cdot h/2$.

Aun así, a pesar de su planteamiento erróneo no influyó, en que Galileo estimara correctamente la carga de rotura, P_{rot} , y determinara de forma adecuada la relación de cargas entre una viga de canto y una viga plana, de acuerdo al siguiente pronunciamiento:

“[...] Una misma viga de diferente ancho que grueso, resistirá más a ser fracturada si se coloca vertical que plana, [...] y lo hará en la proporción del ancho al grueso, [...] ya que, en el primer caso la distancia de la resistencia, que es la mitad de la dimensión ca , será mayor que la distancia en el segundo caso, que sólo será la mitad de bc [...]”

(Indicando posteriormente),

“[...] Conviene que la fuerza del peso T sea mayor que la fuerza del peso X , en la misma proporción que la mitad del canto de ca es mayor que la mitad del canto de bc [...]”

Galileo Galilei (1638), citado por [Brufau Niubó 2004/a, 12].

Es decir, Galileo consideró acertadamente que la carga T (carga en el extremo de la viga de canto) debe ser superior a la carga X (carga en el extremo de la viga pla-

^[40] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 13.

na), y además, en el caso que propone de sección rectangular, se cumple que la relación entre las cargas T y X , debe ser, proporcional a la relación entre la mitad del canto h de la secciones de las vigas ($1/2 \overline{ac}$ para la viga de canto y $1/2 \overline{bc}$ para la viga plana), de acuerdo a la figura 1.4-11. Este concepto lo argumenta Jacques Heyman de la siguiente manera:

“Galileo demuestra con facilidad, y correctamente, que la relación entre las cargas T y X necesarias para romper una viga en ménsula de sección rectangular cuando está puesta de canto a cuando está puesta de plano es simplemente la relación ca/cb , (figura 1.4-11). Dado que el módulo resistente tiene la forma correcta ($k \cdot b \cdot h^2$), el factor ($k=1/2$) [...] no afecta el valor de esta relación.”

[Heyman 2004, 15].

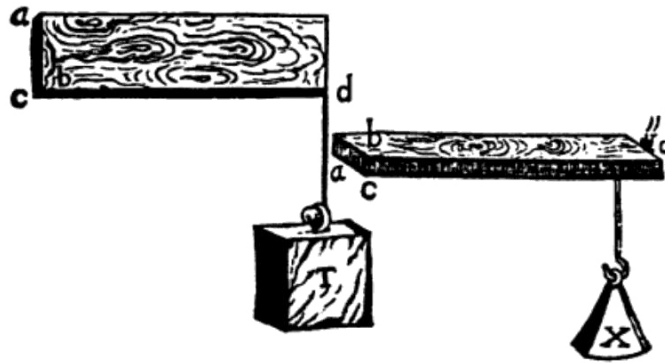


Figura 1.4-11. Comparación de resistencia entre una viga de canto y una viga plana según Galileo. (Imagen tomada de [Heyman 2004, 15]).

Esto se debe, como se demuestra a continuación con la igualdad de las ecuaciones (1.4.3) y (1.4.4), a que, en la proporcionalidad de relaciones entre las cargas T y X , y los respectivos cantos de las vigas ($H = \overline{ca}$ y $B = \overline{cb}$), no afecta al factor k , que para el caso de Galileo tomaría un valor de $1/2$.

$$\sigma_{max} = \frac{T \cdot L}{B \cdot H^2/k} \quad (1.4.3)$$

$$\frac{X \cdot L}{H \cdot B^2/k} = \sigma_{max} \quad (1.4.4)$$

De forma, que simplificando y ordenando, ambas expresiones, (1.4.3) y (1.4.4), se obtiene la relación de proporcionalidad que pronuncia Galileo:

$$\frac{T}{X} = \frac{H}{B} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}}$$

La relación se cumple, como expone Galileo, independientemente del valor del factor k , cumpliéndose la relación de proporcionalidad entre las cargas T y X y la mitad de la altura de las secciones, tal y como plantea Galileo ^[41]. Es decir, de acuerdo a la deducción de tensiones, Galileo Galilei erró en la capacidad resistente de la viga, debido a considerar éstas con una distribución uniforme. Aun así, Galileo al formular la carga de rotura de la viga lo hace correctamente, ya que el error

^[41] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 15.

se compensa automáticamente ^[42], resultando el valor de la carga de rotura correcto, y que se describe mediante la relación:

$$P_{\text{rot}} = \frac{b \cdot h^2}{2L} \sigma_{\text{rot}} \quad (1.4.5)$$

Si bien es verdad, como se demuestra, que el supuesto de Galileo es correcto para secciones rectangulares, dicho planteamiento no es generalizable, dado que no es válido para cualquier tipo de sección o secciones simétricas (como es el caso), con un cierto giro de la sección, no coincidiendo los ejes locales de la sección con los ejes globales ^{[42][43]}. De igual forma, tampoco es generalizable para distintos estados de carga ya sea, por el tipo de carga (puntual/distribuida) y/o más de una carga aplicadas en la ménsula ($\sum T_i \cdot l_i$ y $\sum X_i \cdot l_i$ para los casos que se exponen). Ante un estado cualquiera de cargas, la relación existente resulta ser que el cociente o la relación entre los momentos máximos es igual a una función de forma de las magnitudes de la sección que no tiene por qué ser lineal, y sólo en el caso concreto de una sola carga en la misma posición con respecto a la sección rectangular. Como indica Galileo, se cumple en casos explícitamente particulares, lo cual, le da un mayor valor a su planteamiento, para una viga en voladizo de sección rectangular y con una carga puntual en el extremo.

De la misma forma, Galileo trabajó en un concepto de sumo interés, nuevamente relacionado con la viga en voladizo con carga en el extremo. Introdujo el concepto de «igual resistencia»⁴⁴ para todas las secciones de la viga, al proponer ménsulas de sección variable, mostradas en la figura 1.4-12, de acuerdo a los esfuerzos que debe soportar en cada punto el elemento resistente. Así, se obtiene una geometría para la cual, como establece Heyman ^[45], “rompería por flexión simultáneamente en cada una de las secciones transversales por efecto de una carga situada en el extremo”.

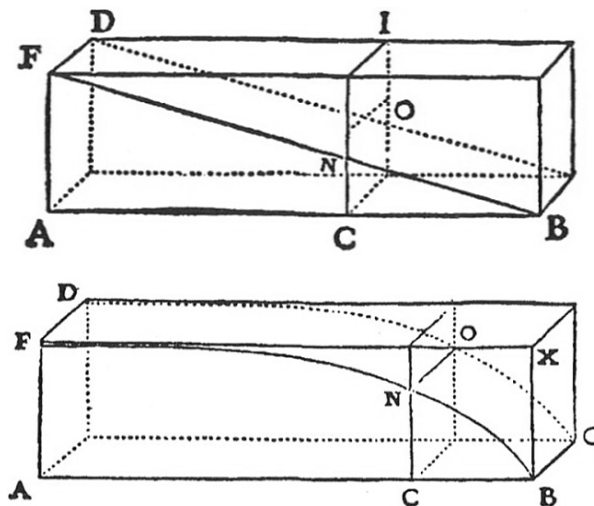


Figura 1.4-12. Ménsula de sección variable y ménsula en curva de «igual resistencia» según Galileo. (Imágenes tomadas de [Heyman 2004, 17]).

^[42] Guerra Fontana, R. (s.f./b). *Teoría general de la flexión*, pp. 12.3 y 12.4.

^[43] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 12.

⁴⁴ El concepto de «igual resistencia», al cual Jean Prouvé se refiere como «resistencia equivalente» o Joan Torras Guardiola utiliza para explicar el concepto de «vigas equilibradas», es de suma importancia para el desarrollo de la presente Tesis, por su relevancia en la optimización y mejora de la eficiencia de estructuras según su forma, ajustando la sección resistente de acuerdo a los esfuerzos que debe soportar.

^[45] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 17.

Robert Hooke (1635-1703), científico experimental británico que, además de sus aportaciones en los ámbitos de la física, la construcción y la arquitectura, destacó en muchos otros campos de la Ciencia, como son la biología, la medicina, la cronometría, el mundo del cosmos, la microscopia y la náutica, contribuyendo con varios descubrimientos. Hooke estableció “la relación entre la magnitud de fuerza y las deformaciones que producen” ^[46]. Su aportación de mayor relevancia trata sobre el comportamiento elástico del material, utilizando muelles estableció la «ley de proporcionalidad elástica», conocida actualmente como la «Ley de Hooke», la cual Thomas Young (1773-1829) reivindicó, a favor de su autor, ciento treinta años más tarde de acuerdo a su expresión, y que fue de gran utilidad para entender, a su vez, el comportamiento estructural desarrollado posteriormente indistintamente por físicos, matemáticos, ingenieros y arquitectos, inicialmente en el contexto lineal ^[47], que en definición actual se expresa:

“Dentro del periodo elástico las tensiones son proporcionales a las deformaciones.”

Robert Hooke (1678), citado por [Diez 2005, 90].

A diferencia de Galileo, Hooke estudió la deformabilidad de los cuerpos elásticos. Tuvo la idea en 1660, cuando trabajaba como ayudante del científico Robert Boyle (1627-1691), pero no publicó este principio hasta 1678 como *Ut tensio sic vis* (“tal es la extensión, así es la fuerza”) ^{[48][49][50][51]}, formando parte de la publicación de su obra *De potentia restitutiva, or of springs explaining the power of springing bodies*, en las *Philosophical transactions* ^[52], de la *Royal Society* de Londres, Sociedad en la cual el mismo participó en su fundación en 1660 junto con Boyle, con quien tuvo una estrecha relación. En 1662 Hooke asumió el cargo de Comisario de Experimentación de tan prestigiosa Sociedad y de secretario en 1677.

Hooke también trató el problema de la flexión en vigas de acuerdo a los conocimientos adquiridos en relación a las tensiones y las correspondientes deformaciones, a pesar de que no se refiriera de forma directa al concepto de «tensión» en sus experimentos, ni siquiera hacía referencia al concepto de «resistencia» que unos años antes había introducido Galileo ^[48]. En las imágenes de la figura 1.4-13, se muestra el planteamiento y aproximaciones que Hooke hizo acerca de la flexión en vigas, bajo el efecto de una acción exterior, dilucidando las características en términos de deformaciones de las fibras traccionadas (tómese el ejemplo de la fibra *GH* que se convierte en la fibra alargada *LM*), y de las fibras comprimidas (tómese el ejemplo de la fibra *IK* que se convierte en la fibra acortada *NO*).

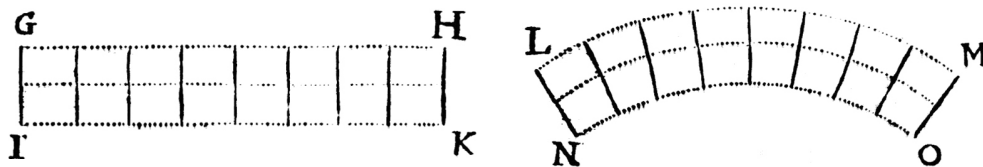


Figura 1.4-13. Ejemplo de una viga deformada a flexión debido a una carga exterior según Hooke. (Imágenes tomadas de [Cervera Bravo 1982, 66]).

[46] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 20.

[47] Brufau Niubó, R. (2011/a). *Robert Hooke, el primer consultor estructural?*, p. 50.

[48] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 14.

[49] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 271.

[50] Mainstone, R.J. (1975). *Developments in structural forms*, p. 290.

[51] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 7.

[52] Hooke, R. (1678).

Tomando como base los estudios y experimentos realizados por Galileo y Hooke, anteriormente descritos, el físico y botánico francés, **Edme Mariotte** (1620-1684), estudió y experimentó la Estática de los cuerpos sólidos sometidos a tracción y flexión, especialmente en su obra *Traité du mouvement des eaux et des autres fluides*, publicada póstumamente en 1686 por su discípulo, Phillippe de La Hire (1640-1719), aunque el trabajo ya era conocido en 1680. De esta forma, Mariotte a igual que Galileo, centró sus estudios de flexión en vigas en el principio de la palanca de Arquímedes, acerca del comportamiento resistente de una viga en voladizo cargada, a la vez que realizó ensayos de tracción basándose en los experimentos de Hooke, siendo capaz de fusionar los conocimientos y aportaciones de ambos científicos ^[53].

Como indica Timoshenko ^[54], la importancia de las investigaciones y aportaciones de Mariotte, inicialmente experimentales y posteriormente teóricas, se centra en su aportación acerca del comportamiento elástico-lineal de los materiales, a tracción y a compresión, que inicialmente fueron erróneos al considerar que la distribución de tensiones era a tracción para toda la sección, formando dicha distribución un bloque triangular, de acuerdo a la figura 1.4-14.

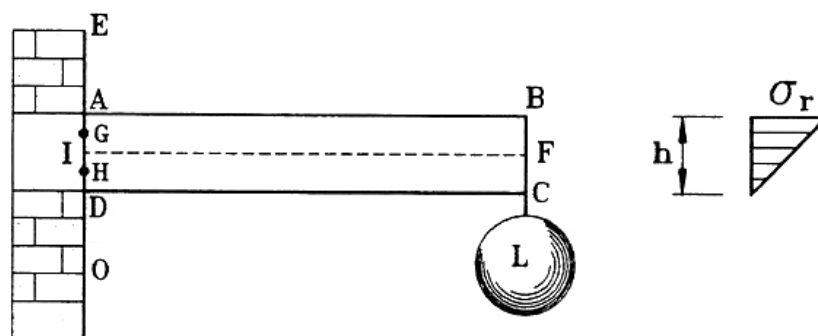


Figura 1.4-14. Estudio de viga en voladizo con carga en el extremo y diagrama de tensiones de la sección según Mariotte. (Notación adaptada de [Brufau Niubó 2004/a, 16]).

Atendiendo a Kurrer ^[55], el cálculo diferencial e integral, que surgió a principios del 1700, tomó fuerza a lo largo del siglo XVIII con su aplicación en la práctica totalidad de los campos de la Ciencia (teoría de la mecánica, ingeniería de la construcción, astronomía, etc.). Su mayor relevancia se da de la mano de matemáticos e investigadores de la Ciencias Naturales, como fueron Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), la saga de los Bernoulli (Jakob B. (1654-1705), Johann B. (1667-1748) y Daniel B. (1700-1782)), o Leonhard Paul Euler (1707-1783), realizando un gran progreso al aplicarlo a la teoría de vigas y curvas elásticas, tal y como se expone a continuación, estableciendo las bases, para su análisis, en el campo de la comprensión estructural.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), fue considerado uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, hasta el punto de ser reconocido como “el último genio universal”. Por ello, sorprende su defensa equívoca de las teorías erróneas de Galileo y Mariotte, que se muestran en la figura 1.4-15, por las cuales se interesó a raíz de la controversia de ambos científicos sobre la flexión de vigas en voladizo, y como se desprende de su publicación *Demonstratione novae de resis-*

[53] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 16.

[54] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 21.

[55] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 32.

tentia solidorum, en 1684, al situar el eje neutro en la parte inferior de la sección (sitúa el fulcro de la palanca en el punto *A*) ^{[56][57]}.

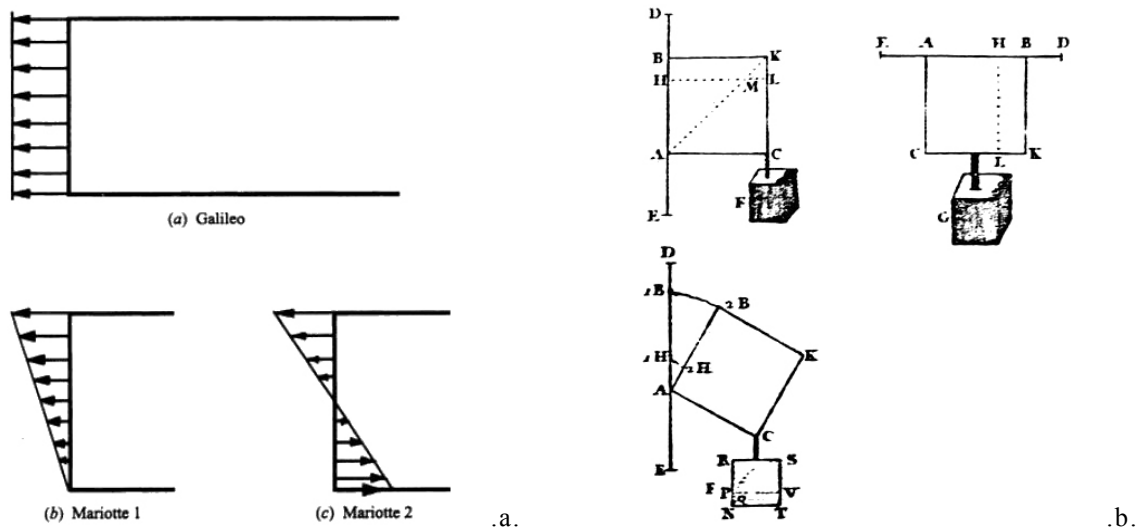


Figura 1.4-15. a) Estimación de las distribuciones de tensiones en el arranque de una ménsula, según Galileo y Mariotte, b) Consideración equívoca de la posición del fulcro en la parte inferior según Leibniz. (Imágenes tomadas de [Heyman 2004, 22] y [Brufau Niubó 2004/a, 20] respectivamente).

Como indica Heyman ^[57], Leibniz estudió las teorías «inextensibles» de Galileo y las teorías «extensibles» de Mariotte, concluyendo que la segunda era la correcta y dedujo la que se conoció como la hipótesis lineal de la teoría de Mariotte-Leibniz, para una distribución «elástica» de tensiones, que años más tarde fue cuestionada por **Pierre Varignon** (1654-1722), concretamente en 1702. Varignon siguió colocando erróneamente la línea neutra en la parte inferior de la sección, a pesar de que “desarrolló lo que podría llamarse una teoría unificada de la flexión” ^[57], que despertó el interés de Jakob Bernoulli por esta temática.

Jakob Bernoulli (1654-1705), matemático y científico suizo, basó su trabajo a raíz de los planteamientos de Leibniz, para desarrollar problemas de cálculo infinitesimal, especialmente la posibilidad de aplicación de esta nueva herramienta de la matemática para discutir acerca de variados problemas de la Mecánica y la Física, realizando en 1691 la primera contribución a la flexión elástica de una viga desde una vertiente analítica del problema, que presentó con el logogrifo *Qrzumu bapt dxqopddb...*, que descifró en 1694 en su obra *Curvatura laminae elasticae*, como *Portio axis applicatam...*, para referirse a “que el radio de curvatura en cualquier punto de una viga inicialmente recta es inversamente proporcional al valor del momento flector en ese punto” ^[57].

Por lo tanto, como refieren Guerra ^[58], Heyman ^[57] y Timoshenko ^[59], mientras Galileo y Mariotte se centraron en investigar la resistencia de vigas a flexión, Jakob Bernoulli, hizo cálculos para determinar sus deformaciones, ya que supuso que el fenómeno de la flexión exigía un giro de las secciones con respecto a otras, siendo el primero en dar una solución al problema de la elástica. Además, sus conocimien-

[56] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 20.

[57] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 20, 24, 25, 74 y 75.

[58] Guerra Fontana, R. (s.f./b). *Teoría general de la flexión*, p. 12.4.

[59] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 26.

tos le permitieron establecer el postulado de Bernoulli aplicado al caso del análisis completo sobre las formas de las secciones rectas de las vigas, que publicó en sus obras ^[60], en donde estableció:

“Si las secciones de un sólido eran planas antes de la flexión, permanecerán planas después de deformarse.”

Hipótesis de Jakob Bernoulli⁶¹ (1694/95, 1705), citado por [Diez 2005, 90].

Sin embargo, fue el matemático y físico suizo, **Leonhard Paul Euler** (1707-1783), quien planteó la teoría matemática para una viga a flexión en sus obras *Introduction to Calculus*, en 1748, *Differential Calculus*, en 1755 e *Integral Calculus*, en 1768-1770, centrando su interés en el comportamiento y las formas geométricas de las curvas elásticas y la teoría de las vigas, formulándolo de acuerdo a la teoría de Jakob Bernoulli sobre las deformaciones de una lámina elástica ^{[62][63][64][65]}.

Por lo tanto, Leonhard Euler, junto con las sugerencias de Daniel Bernoulli, utilizó el método directo, de acuerdo a las ecuaciones diferenciales, para establecer una teoría efectiva y rigurosa, alrededor de 1750, sobre la ecuación de las curvas elásticas que había utilizado con anterioridad Jakob Bernoulli. Es por ello por lo que, se considera que Euler fue co-descubridor de la teoría de las curvas elásticas, expresada mediante su espiral, formulando así la ecuación de Euler-Bernoulli ^{[65][66]}.

La ecuación de Euler-Bernoulli, acerca de la teoría de vigas, también conocida como «teoría de la viga clásica», es una simplificación de la teoría lineal isotrópica de la elasticidad, utilizada frecuentemente, ya que proporciona aproximaciones razonables para resolver varios problemas de ingeniería de una forma básica ^{[63][67]}. La ecuación de Euler-Bernoulli describe la relación entre la deformación de una viga elástica a flexión y la carga distribuida aplicada.

Por ello, dicha ecuación expresa un caso especial de la teoría de la viga elástica de **Stephen P. Timoshenko** (1878-1972) que considera la inercia de rotación y la deformación por cortante en vigas cortas y vigas gruesas de sección prismática bajo la carga que produce una excitación de una frecuencia elevada. La viga de Timoshenko, establecida el año 1921, combina la deformación por flexión (curvatura) y la deformación por cortante o tangencial (distorsión lineal) ^[68]. La teoría de Timoshenko se basa en la suposición de la posición del plano deformado, después de la deformación de la viga, con un determinado ángulo con respecto al plano normal al eje de la viga antes de deformar ^[69].

Debido a la facilidad de expresión, a la vez que de adecuada precisión y rigor, la teoría de la elasticidad simplificada de vigas de Euler-Bernoulli tuvo muchas aplicaciones prácticas. Sin embargo, su aplicación no fue de gran relevancia hasta la segunda Revolución Industrial, una vez se hubo utilizado de forma satisfactoria

^[60] Bernoulli, J. (1694/95, 1705).

⁶¹ Como indica [Guerra Fontana s.f./b, 12.5], se debe matizar que esta hipótesis no es totalmente correcta, ya que, no siempre se cumple, dado que los esfuerzos cortantes pueden producir alabeos.

^[62] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 32.

^[63] Han, S.M.; Benaroya, H.; Wei, T. (1999). *Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories*, p. 936.

^[64] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 8.

^[65] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 30 y 32.

^[66] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 77.

^[67] Gavriluk, I.P.; Makarov, V.L.; Popov, A.M. (2010). *Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ode's*, pp. 60 y 61.

^[68] Gómez Hermoso, J. (2013). *Proyecto de edificios altos*, p. 262.

^[69] Thomas, D.L.; Wilson, J.M.; Wilson, R.R. (1973). *Timoshenko beam finite elements*, pp. 315-330.

para el montaje de uno de los símbolos de la Exposición Universal de París de 1889, la Torre Eiffel, así como para la construcción de la noria *Ferris Wheel* de la Exposición Mundial de Chicago de 1893, convirtiéndose, así, en una importante herramienta en las ciencias, principalmente, en los ámbitos de la ingeniería estructural y la mecánica ^[70].

Antoine Parent (1666-1716) fue un académico que contribuyó de una forma fundamental, a pesar de que su trabajo fuera ignorado por los científicos de su época, al realizar un tratamiento correcto, a diferencia de Mariotte, tal y como se desprende de su texto *Recherches de mathématiques et de physique*, del comportamiento tensional de las secciones solicitadas a flexión pura ^[71]. Como indica Timoshenko ^[72], la distribución de tensiones de una sección de una viga flectada no fue tratada por los matemáticos del siglo XVIII, que desarrollaron, de acuerdo a lo expuesto anteriormente, la teoría de las curvas elásticas considerando la curvatura proporcional al momento flector, sin cuestionarse dicha temática, o hacerlo de forma errónea. En ello radica la importancia de los avances de Parent que, para explicar los resultados del ensayo de Mariotte, consideró la forma correcta de trabajar de la sección transversal, concluyendo que para determinar el módulo resistente elástico era necesario representar la distribución de tensiones de forma bi-triangular, corrigiendo el error de Mariotte ^[72], y afirmó, como describe Heyman ^[73] de acuerdo a la figura 1.4-16, “que la resistencia total de las fibras en el triángulo de compresiones *CBX* debe de ser igual a la del triángulo de tracciones *CAT*, ambas fuerzas actuando en *I* y *D* respectivamente”.

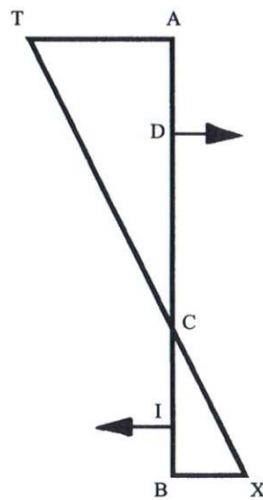


Figura 1.4-16. Distribución de tensiones de flexión según Parent. (Imagen tomada de [Heyman 2004, 28]).

Como indican Heyman ^[73], Kurrer ^[74] y Timoshenko ^[72], en los años posteriores a los resultados obtenidos por Parent se realizaron nuevos ensayos de tracción, compresión y flexión sobre madera, piedra y hierro, obteniendo así más resultados para contrastar con la teoría de Parent. El físico holandés **Petrus van Musschenbroek** (1692-1761) contribuyó a dicha temática de forma notable y novedosa en 1729, al ser el primero en construir un aparato para realizar ensayos de tracción, a la vez,

^[70] Gavriljuk, I.P.; Makarov, V.L.; Popov, A.M. (2010). *Super-exponentially convergent parallel algorithm for eigenvalue problems for the fourth order ode's*, pp. 60 y 61.

^[71] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 20.

^[72] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 43-45, 54 y 55.

^[73] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 28 y 29.

^[74] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 274.

que realizó experimentos para investigar en los materiales la influencia de la flexión y de la compresión, como se desprende de su publicación *Physicae, experimentales et geometricae*, en la cual, describió los ensayos realizados y los aparatos que él mismo inventó, diseñó y construyó para llevarlos a cabo. Estudió, principalmente, el comportamiento de columnas esbeltas, donde el fallo, como describe Heyman ^[75], “se produce por pandeo más que por la rotura del material”, afirmando, años antes que Euler, que “la carga crítica de pandeo, P_{crit} , es inversamente proporcional al cuadrado de la longitud de la barra comprimida”, como refiere Kurrer ^[76].

Sin embargo, los ensayos de flexión realizados por Musschenbroek, fueron fuertemente criticados por **Georges Louis Leclerc** (1707-1788), conde de Buffon, el cual centró su trabajo en las ciencias naturales, y principalmente, en las propiedades mecánicas de la madera. Leclerc argumentó su crítica hacia los experimentos de Musschenbroek al considerar que no daban la información suficiente a los ingenieros estructurales, basándose en que los especímenes utilizados por el físico holandés eran demasiado pequeños, siendo necesarios realizar ensayos de vigas con modelos de mayores dimensiones, como los que Buffon realizó para vigas de unos 8,5 m de longitud (28ft) y de 10x10 cm y 20x20 cm (4x4 in. y 8x8 in.) de sección transversal ^[77].

En el mismo año que los ensayos realizados por Musschenbroek, 1729, el ingeniero **Bernard Forest de Bélidor** (1698-1761) publicó el libro *La science des ingénieurs*, basado en el cálculo diferencial e integral, el cual tuvo una enorme influencia. Una obra que, en realidad, se considera un manual, que se compone de seis partes, y donde trató los temas más importantes de la construcción del siglo XVIII, de los cuales destacan por su gran nivel de detalle, el empuje de los suelos (mecánica del suelo), el cálculo del empuje de los arcos (basándose en la obra de La Hire de 1712, como se trata posteriormente), las propiedades de los materiales de construcción y los resultados de los ensayos de rotura de vigas a flexión realizados con la ayuda de sus alumnos ^{[75][76]}.

De igual forma, como indica Heyman ^[75], **Charles Augustin Coulomb** (1736-1806) abordó los cuatro problemas “cásicos” del siglo XVIII, en el ámbito de la construcción de la arquitectura y de la ingeniería, como eran: la resistencia de vigas, la resistencia de columnas, el empuje de los suelos, y el empuje de arcos, que se verá más adelante. Las cuatro temáticas fueron abordadas en su tratado *Essai sur une application des règles des Maximus et Minimus à quelques Problèmes de Statique relatifs à l'Architecture*, que fue presentado en 1773, pero publicado en 1776 ^[78]. La aportación de Coulomb, con conceptos nuevos, supuso una contribución fundamental en la ciencia de la Resistencia de Materiales, y que Robert Bru-fau Niubó argumenta así:

“(Para analizar vigas sometidas a flexión), Coulomb introdujo un concepto nuevo: la «fuerza de cohesión», entendida como el cociente entre la «Resistencia absoluta de la sección» y su área [...]. Si la resistencia absoluta equivale al valor de la fuerza resultante que actuaría sobre la sección en el momento de romperla, la fuerza de cohesión identificaría el valor de la «Tensión normal de rotura» (σ) del material de la sección.

[...] Coulomb recurrió a la aplicación de las ecuaciones generales de equilibrio de la estática, deduciendo así que en cada sección vertical debería haber también «fuerzas

^[75] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 29-31.

^[76] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 33 y 274.

^[77] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 55 y 57.

^[78] Coulomb, C.A. (1773/1776).

de cohesión verticales», el sumatorio de las cuales debería ser equivalente a la carga vertical aplicada. Así apareció, por primera vez el concepto del esfuerzo cortante y la «tensión vertical» (τ) ligada a este esfuerzo, y en dirección tangente en la sección.

Coulomb hizo todavía otro paso adelante al sugerir que las tensiones verticales y les horizontales deberían analizarse conjuntamente, apareciendo, de manera implícita, las «tensiones combinadas», que podrían ser causantes de roturas en planos no coincidentes con el plano vertical o con el horizontal. Valga, como ejemplo, la conclusión a que llegó respecto a la rotura a 45° que sufriría un prisma vertical sometido únicamente a la acción de cargas compresivas axiales.

[...] Se podría decir, sin riesgo de equivocación, que Coulomb fue el padre del actual análisis tensional, siendo de una gran importancia su influencia en las generaciones de ingenieros del siglo XIX, aun considerando que sus teorías tuvieron una difusión muy lenta entre los sabios de la época. Su obra científica no se limitó al análisis tensional, sino que abarcó también numerosos trabajos sobre muchos otros aspectos de la construcción arquitectónica o ingenieril. Encontramos, por ejemplo, su nombre asociado al cálculo de los empujes del terreno y de los muros de contención así como al estudio del trazado de los arcos y de las bóvedas.”

[Brufau Niubó 2004/a, 22].

En cuanto al tratamiento de la flexión de vigas en voladizo, Coulomb abordó el problema elástico, considerando una distribución general de las tensiones, utilizando correctamente las ecuaciones de equilibrio de la Estática para analizar la fuerzas internas de la sección transversal de la viga, de acuerdo a un corte hipotético vertical ACD , como se muestra en la figura 1.4-17, para calcular la resistencia de rotura de una viga, ubicando la posición del eje neutro en el centro (para el caso estudiado de la sección transversal simétrica). Además, realizó ensayos de fractura de cuerpos de distintos materiales, como eran la madera y la piedra. Coulomb llegó a las mismas conclusiones que había obtenido Parent sesenta años antes (1713), como por ejemplo, que las fibras superiores estaban traccionadas y que las fibras inferiores estaban comprimidas. Parece ser que no conocía los *essais* (ensayos) de dicho autor, llegando a determinar el valor «correcto» del módulo resistente elástico para una sección rectangular ($1/6 \cdot b d^2$), ^{[79][80]}.

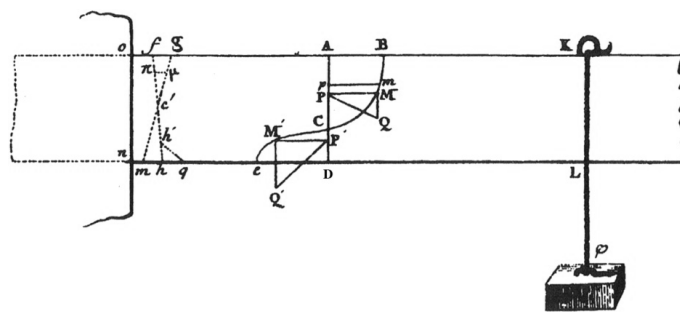


Figura 1.4-17. Equilibrio de una ménsula cargada según Coulomb. (Notación adaptada de [Heyman 2004, 33]).

Claude-Louis Marie Henri Navier (1785-1836), discípulo de Fourier, fue un ingeniero y físico francés, que estableció la primera formulación matemática de valor de la Teoría de contenido general de la Elasticidad de los cuerpos sólidos, en su obra *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élasti-*

^[79] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 32-34.

^[80] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 49 y 50.

ques, presentada en la *Académie des Sciences* en el año 1821 ^[81], e impreso en 1823 ^[82], considerándose, por ello, el creador de ésta. Además, anunció las reglas fundamentales del cálculo tensorial, (que Augustin Louis Cauchy (1789-1857) estableció definitivamente, referido a continuación de Navier), y destacó en hidrodinámica, realizando estudios de los cuales surge la ecuación Navier-Stokes. Con su obra, Navier ofreció una explicación general de la composición general de la materia, además de establecer con su aportación la base de la nueva ciencia de Resistencia de Materiales ^{[83][84][85]}. Dicha aportación, le permitió publicar, el año 1826, su conocido libro de las *Résumé des Leçons* ^[86], del cual se hizo una edición ampliada, en 1864, que publicó **Jean Claude Barré de Saint-Venant** (1797-1886) incluyendo, a pie de página, sus notas *Avec des notes et des appendices* ^[87].

En la mencionada publicación, como indica Heyman ^[88], Navier rectificó su planteamiento erróneo, acerca de la flexión pura (aunque sin considerar el cortante, como anota Saint-Venant), y situó correctamente la posición del eje neutro y, así, “restableció el equilibrio de fuerzas horizontales (de Coulomb), de manera que el eje neutro en la flexión elástica debía pasar por el centro de gravedad de la sección transversal”, en acepción a Heyman ^[88], para los casos de flexión pura y simple, y a lo cual, Brufau ^[89], de acuerdo a la figura 1.4-18, añade: “Navier define la flexión como un esfuerzo que actúa en sentido perpendicular a la longitud del sólido, que se deforma curvándose, comprimiendo y acortando sus fibras cóncavas, y traccionando y alargando las convexas, mientras que otras fibras, situadas en el interior, permanecen invariables”, que Navier anunció con la siguiente hipótesis:

“Los alargamientos o acortamientos (y, en consecuencia, las tensiones normales) de cada fibra de una sección serán directamente proporcionales a las distancias que habrá desde el punto correspondiente de la fibra en cuestión hasta la línea neutra de la sección que se analiza.”

Claude-Louis M. H. Navier, citado por [Brufau Niubó 2004/a, 24].

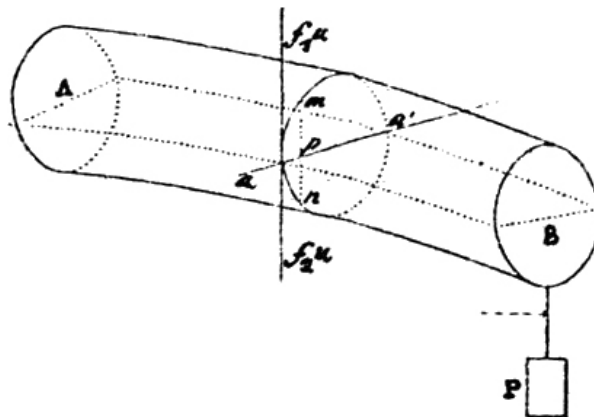


Figura 1.4-18. Viga en voladizo de sección circular con una carga en el extremo según Navier. (Imagen tomada de [Brufau Niubó 2004/a, 24]).

[81] Navier, C.-L.M.H. (1821).

[82] Navier, C.-L.M.H. (1823).

[83] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 8.

[84] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 115.

[85] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 73 y 105.

[86] Navier, C.-L.M.H. (1823).

[87] Navier, C.-L.M.H. (1864).

[88] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, pp. 36 y 39.

[89] Brufau Niubó, R. (2004/a). *La flexión pura y la flexión simple*, p. 24.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) tras leer el artículo de Navier (1821), en el cual Navier consideraba fuerzas actuando entre las moléculas individuales de un cuerpo elástico deformado, se interesó por la temática e inició su trabajo acerca de la Teoría de la Elasticidad, obteniendo resultados muy valiosos en esta rama de la ciencia, los cuales le permitieron anunciar reglas fundamentales del cálculo tensorial ^{[90][91]}. A su vez, los conocimientos de Cauchy sobre hidrodinámica le permitieron realizar estudios de presión sobre un plano, introduciendo, así, por primera vez en Teoría de la Elasticidad una definición válida sobre el concepto de «tensión», con un lenguaje extraordinariamente claro, que presento en 1822 en la *Académie des Sciences* y que publicó en 1823 ^[92]. Posteriormente Cauchy introdujo el tensor de tensiones ^[93], y el tensor de deformaciones ^[94]. La obra de Cauchy en esta etapa inicial, acerca de la Teoría de la Elasticidad, (de alto grado didáctico, en base a la exposición de la misma y sin mermar en rigor tecno-científico), fue resumida por Saint-Venant en dos capítulos de Elasticidad ^[95], los cuales fueron escritos por Abbé Moigno (1804-1884). Como se trata posteriormente, Cauchy realizó también estudios en elementos infinitesimales de un plano de un cuerpo elástico que se deforma y, de acuerdo a las tres componentes de tensión, para un plano inclinado estableció los ejes principales de esta superficie, a los cuales denominó «**direcciones principales**», correspondientes a las «**tensiones principales**», **elemento vital en el análisis de este trabajo acerca de las líneas isostáticas de tensiones**. Todas estas aportaciones, junto a las que realizó con barras rectangulares torsionadas, las utilizó posteriormente Saint-Venant ^{[91][96]}.

William John Macquorn Rankine (1820-1872) desarrolló un trabajo de gran relevancia acerca de la Resistencia de Materiales y de la Teoría de las Estructuras que abordó en sus obras *Manual of Applied Mechanics*, publicado por primera vez en 1858 ^[97], empezando con la teoría matemática de la elasticidad, y su *Manual of Civil Engineering* ^[98], publicado en 1862. Como se desprende de sus publicaciones, Rankine trató en profundidad distintas ramas de la ingeniería, especialmente en la búsqueda de la comprensión de las tensiones tangenciales producidas por el esfuerzo cortante. Rankine abordó de forma completa la temática de la tensión y la deformación, a la vez que desarrolló las ecuaciones fundamentales de equilibrio, tratando cada temática primero desde una visión más global y posteriormente considerando distintos casos particulares de interés, como fue su método de proyecciones paralelas en Estática y sus posibles aplicaciones, que dieron lugar a los métodos gráficos para el diseño y el análisis completo de armaduras planas ^{[91][99]}.

Cabe indicar, como se aborda posteriormente con el tratamiento de **Karl Culmann** (1821-1881), que es necesario hacer una primera referencia en relación a la importancia de las tensiones principales descritas por Cauchy y Rankine, dado que **Culmann es el primero en visualizar las líneas isostáticas a través de las direcciones de las tensiones principales** y, que posteriormente desarrolló **Christian Otto Mohr** (1835-1918), como indica Cardellach ^[100].

[90] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 115.

[91] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 108-111, 198 y 244.

[92] Cauchy, A.L. (1823). *Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques*.

[93] Cauchy, A.L. (1827/a). *De la pression ou tension dans un corps solide*.

[94] Cauchy, A.L. (1827/b). *Sur la condensation et dilation des corps solides*.

[95] Moigno, A. (1868). *Leçons de Mécanique Analytique: Statique*.

[96] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 721.

[97] Rankine, W.J.M. (1858).

[98] Rankine, W.J.M. (1862).

[99] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 6.

[100] Cardellach Alivés, F. (1910). *Filosofía de las estructuras*. Reimpreso en 2010, p. 22.

En el tratado ^[101] de Isaac Todhunter (1820-1884) editado y ampliado, en 1893, por Karl Pearson (1857-1936), se recopilan de una forma exhaustiva los distintos y complejos desarrollos matemáticos realizados por célebres científicos durante varias décadas, correspondientes a la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales, para abordar la temática del cálculo de tensiones elásticas ^[102]. Por ejemplo, dicho libro, recoge extensamente las aportaciones de vigas elásticas a flexión de autores como **Édouard Phillips** (1821-1889), el cual en su obra del año 1856 ^[103], *Mémoires couronnées et mémoires des savants étrangers*, y previamente publicado en 1852 ^[104] en un artículo en la revista *Annales des Mines*, presentó uno de los conceptos principales de optimización de su obra, al publicar en base a la teoría a flexión de vigas de Euler-Bernoulli, acerca de la teoría de la viga elástica a flexión, una viga en voladizo precurvada de sección variable formada por láminas, como se aprecia en la figura 1.4-19, las cuales asume que se mantienen en contacto durante la flexión ^{[101][105]}.

Disminuyendo progresivamente la longitud de cada una de las láminas del elemento resistente y con una disminución en forma de punta en la parte final de dichas láminas, es posible cambiar la curvatura del soporte elástico ^[105]. Phillips plantea precurvar el elemento resistente de forma que se reduce la sección de la viga, pero con flexibilidad, reduciendo así el peso propio.

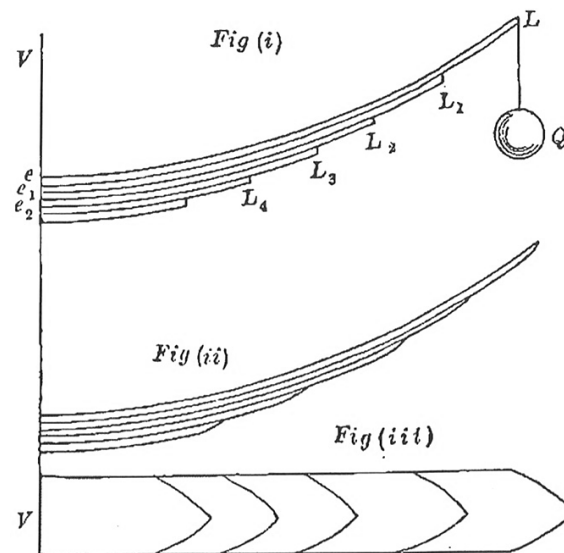


Figura 1.4-19. Viga en voladizo precurvada formada por distintas láminas unidas según Phillips. (Imagen tomada de [Todhunter et al. 1893, 331]).

De igual forma, **August Ritter** (1826-1908) estudió también, en su obra *Lehrbuch der technischen Mechanik* ^[106] publicada en 1865, la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales, como se desprende de la viga en voladizo en forma de triángulo isósceles, que se muestra en la figura 1.4-20. August Ritter lo demuestra gráficamente, resolviendo el sistema de ecuaciones de equilibrio en base a los métodos existentes de la Estática Gráfica (los cuales se tratan posteriormente en el apartado 1.7), al suponer una carga P para cada lámina de manera que si se sabe la

[101] Todhunter, I.; Pearson, K.; *A History of the Theory of Elasticity of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time*, pp. 330 y 331.

[102] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 2.

[103] Phillips, E. (1856).

[104] Phillips, E. (1852).

[105] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 244.

[106] Ritter, A. (1865).

deformación de cada una de las láminas de grosor constante se puede atender, posteriormente, a la curvatura de la viga en voladizo ^[107].

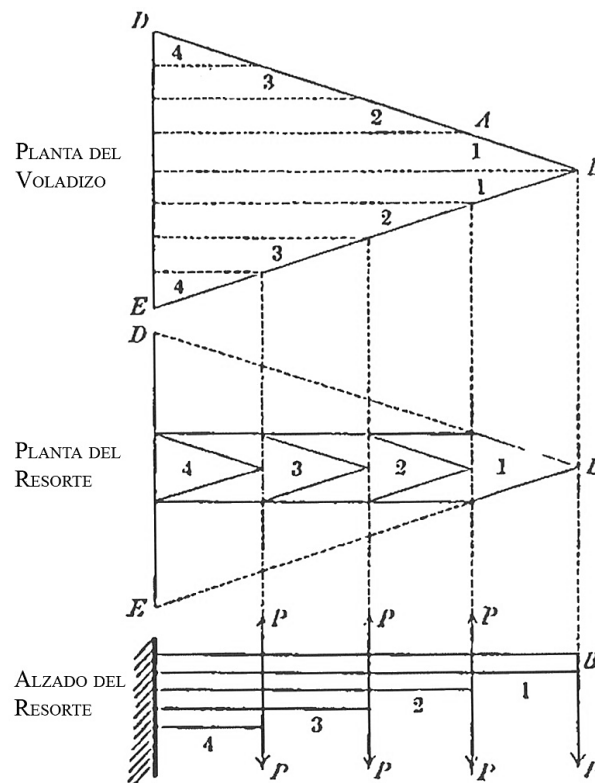


Figura 1.4-20. Viga en voladizo formada por distintas láminas unidas según Ritter. (Notación adaptada de [Todhunter et al. 1893, 626]).

Es destacable que su aportación permitió avanzar acerca de los métodos derivados de la Estática Gráfica, presentando el método analítico conocido como el *método de los momentos* de August Ritter, en base al planteamiento tratado posteriormente más conocido como el *método de las secciones*, que mostró en su libro sobre techos de hierro y estructuras de puentes publicado en 1862, *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach - und Brückenkonstruktionen* ^[108]. El método propuesto por August Ritter, la idea del cual provenía supuestamente de Mohr, permite determinar las fuerzas internas de las barras de estructuras de entramado estáticamente determinadas, significando un gran avance para el análisis de celosías, muy necesario ante la necesidad de diseñar y calcular puentes más económicos y con mayor seguridad ante la creciente demanda de la industria del ferrocarril ^{[109][110][111]}, como se expone en el apartado 1.6.

En la misma época, y posteriormente, fueron varios los científicos que abordaron esta temática. Entre ellos destacan A. E. H. Love (1863-1940), W. Fairbairn (1789-1874), A. Wöhler (1819-1914), F. Roffiaen (1820-1898), W. H. Barlow (1812-1902), D. J. Jourawski (1821-1891), B.-P.-E. Clapeyron (1799-1864), E. Winkler (1835-1888), H. Sheffler (1820-1903), entre otros, cuyas obras se recopilan en el citado tratado de Todhunter.

^[107] Todhunter, I.; Pearson, K.; *A History of the Theory of Elasticity of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time*, pp. 625-627.

^[108] Ritter, A. (1862).

^[109] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 56 y 57.

^[110] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 760.

^[111] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 189 y 304.

1.5 La inversión catenária

En el presente epígrafe se aborda una temática de especial relevancia en el desarrollo de la Tesis, dado que describe formalmente la relación entre la forma y la función estructural, y como desde el estudio de la forma es posible determinar, desde un punto de vista gráfico, la estabilidad de un elemento resistente, permitiendo obtener, así, un mejor comportamiento estructural de dicho elemento. Mediante la **forma inversa de la catenaria**, de acuerdo al «principio de la inversión» que se trata posteriormente, fue introducido en el siglo XVII por **Robert Hooke** (1635-1703) como una metodología operativa y una herramienta de gran utilidad, basada en la lógica conceptual, para el diseño de **estructuras resistentes por su forma**. De acuerdo a esta metodología de diseño, las formas geométricas obtenidas bajo la acción del peso propio del elemento resistente se caracterizan por trabajar únicamente a esfuerzos axiales, de compresión o de tracción, ya que **las líneas isostáticas de tensiones resultantes siguen las mismas direcciones que los ejes estructurales**. Este método gráfico para el diseño de elementos resistentes, ampliamente utilizado a lo largo de la historia de la construcción, permite obtener estructuras más eficientes.

1.5.1 La catenaria

A diferencia de la parábola, que ya se estudió en la época de los griegos desde el planteamiento básicamente visual y tangible de la geometría, las curvas catenarias fueron descubiertas y analizadas hace relativamente poco tiempo, salvo la referencia a **Simon Stevin** (1548-1620) encajada en el siglo XVII, a cargo de distintos matemáticos y físicos desde una vertiente matemática en general y desde el desarrollo del cálculo y de la geometría analítica en particular ^[1].

La catenaria es la curva que adopta un cable o hilo perfectamente flexible de densidad constante, colgado de sus extremos, estando sometido a una acción gravitatoria uniformemente distribuida por unidad de longitud, tal y como se muestra en la figura 1.5-1, y que Carlos Ivorra Castillo define como:

“La catenaria es la curva cuya forma es la que adopta una cuerda de densidad uniforme sujeta por sus dos extremos y sometida únicamente a la fuerza de la gravedad.”

[Ivorra Castillo s.f., 1].

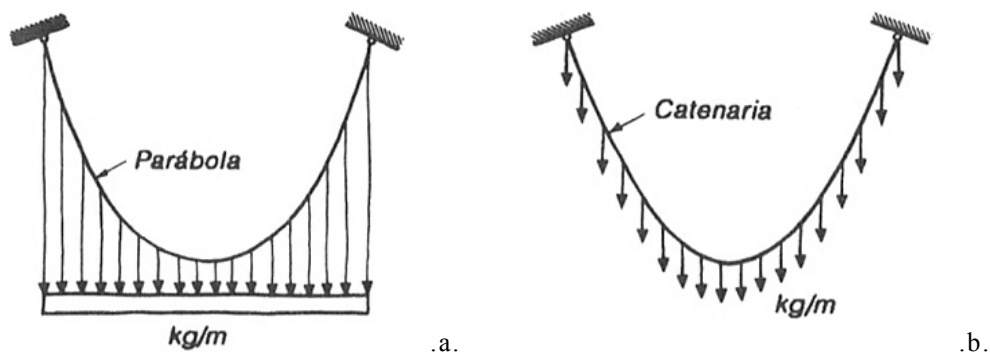


Figura 1.5-1. Curvas funiculares: parábola (a) y catenaria (b). (Imágenes tomadas de [Salvadori et al. 1998, 71]).

[1] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 55.

Por ello, y de la misma forma, Jaume Serrallonga Gasch define la curva de la catenaria como:

“La curva catenaria se convierte en una síntesis entre geometría y mecánica, [...] ya que es una curva que busca una forma geométrica concreta, la que adopta una cadena suspendida de forma natural, y tiene unas características mecánicas muy especiales: toda la cadena suspendida trabaja exclusivamente a tracción (axial puro).”

[Serrallonga Gasch 2003, 55].

La forma de la catenaria es fácilmente confundible con la de una parábola. Prueba de ello, es que un científico del prestigio y de la relevancia como fue **Galileo Galilei** (1564-1642) erró en su planteamiento acerca de la catenaria, publicado en su obra ^[2]. Dicho error se produjo al establecer que la cadena colgante adoptaría la forma de una parábola, siendo la parábola una ecuación cuadrática, mientras que la catenaria involucra funciones hiperbólicas. A pesar de tratarse de un error, se puede considerar una buena aproximación que permitió simplificar, a lo largo de varios años, el diseño y el cálculo de arcos ^[3].

Christiaan Huygens (1629-1695) demostró en 1646 que la forma que adoptaba una cadena colgante no era la de una parábola, tal y como había anunciado años antes Galileo, pero no supo formular la ecuación de la curva catenaria. Joachim Jungius (1587-1657) hizo pública la controversia y desató un debate entre los científicos más prestigiosos de la época. Para resolver dicha confusión, fue necesario que pasaran casi 50 años desde la muerte de Galileo (1642) para que se publicara en la revista científica alemana *Acta Eruditorum*⁴ en el año 1691, a petición de **Jakob Bernoulli** (1654-1705) que lanzó el reto en 1690, la fórmula matemática que definía la forma de la catenaria. Dicha solución, tal y como se muestra a la figura 1.5-2, fue publicada por **Johann Bernoulli** (1667-1748), junto con **Huygens** y **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) que ya había encontrado la solución un año antes pero no la dio a conocer ^[3].

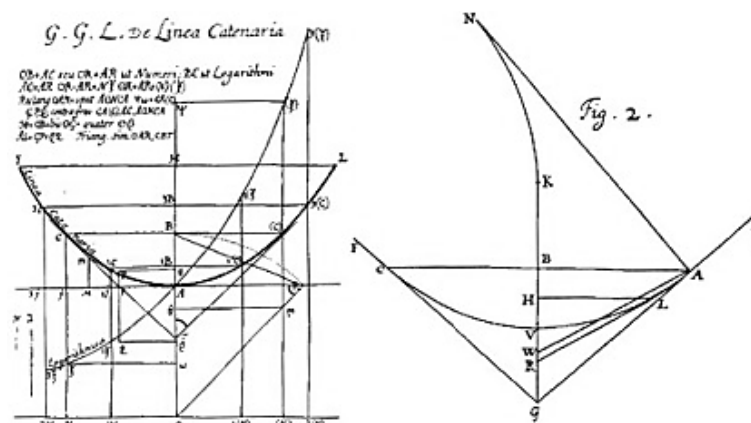


Figura 1.5-2. Soluciones remitidas en 1691 por Leibniz y Huygens a J. Bernoulli para su publicación en *Acta Eruditorum*, acerca de la catenaria. (Imagen tomada de [<http://curvebank.Calstatela.edu/catenary/actaleibniz.jpg>]).

^[2] Galilei, G. (1638). *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali*.

^[3] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 55-57.

⁴ *Acta Eruditorum*, fundada en Leipzig por Otto Mencke (1644-1707) por iniciativa de Leibniz, fue la primera revista científica alemana publicada entre los años 1682 y 1782, y la cual se escribía en latín, comprendía resúmenes de textos nuevos, críticas, ensayos cortos y notas, esencialmente dentro del dominio de las ciencias naturales y las matemáticas, pero también en el de la teología y la filosofía, [<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/publications/journals/ActaEruditorum.html>].

Huygens propuso el nombre de catenaria, derivado del latín *catena* (cuyo significado es cadena), para designar esta familia de curvas, en una carta a Leibniz en el año 1660. En el mismo año, Johann Bernoulli y Huygens publicaron en la revista *Acta Eruditorum* la ecuación de la catenaria ^[5]. La descripción matemática de la ecuación de la curva catenaria tomando su mínimo en el punto (0, a) es:

$$y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \left(\frac{a}{2}\right) \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}); \quad \text{para:} \quad a = \frac{T_H}{\lambda} \quad (1.5.1)$$

donde,

a , es el parámetro que regula la distancia al origen de referencia desde el punto mínimo de la curva catenária;
 λ , es el peso por unidad de longitud y T_H es la proyección horizontal de la fuerza que se produce en los extremos del cable.

Como se ha visto, es fácil confundir la forma de una catenaria con la forma de una parábola, dada su gran semejanza. **Christian Otto Mohr** (1835-1918) fue el primero en anunciar que la ecuación diferencial de la curva funicular. A partir de una carga de intensidad variable q distribuida a lo largo del tamo AB , como se muestra en la figura 1.5-3, tiene la misma forma que la ecuación diferencial de la línea elástica, sólo para el caso simplificado considerado para pequeñas deformaciones y viga de sección constante ^{[5][6]}.

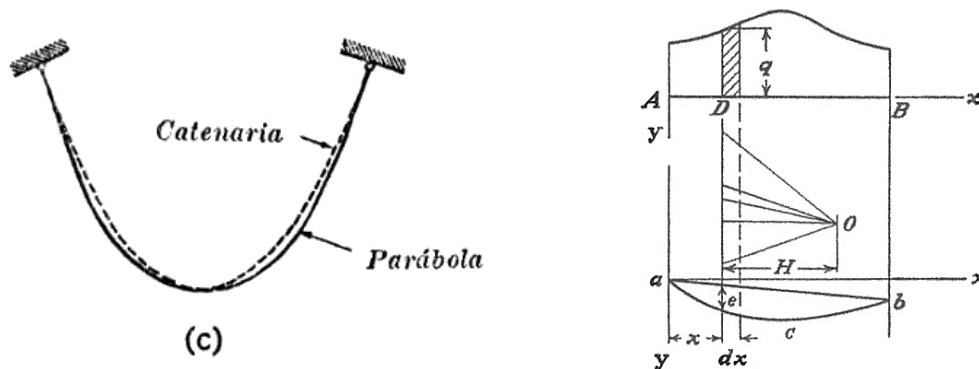


Figura 1.5-3. Representación gráfica de la parábola y la catenaria y curva funicular para una carga q distribuida variable. (Imágenes tomadas de [Salvadori et al. 1998, 71] y [Timoshenko 1953, 1983, 284] respectivamente).

1.5.2 El arco catenário. El principio de la inversión

Cuando se menciona el arco catenário o arco ideal se hace referencia al «principio de la inversión», la base del actual se remonta al siglo XVII, en concreto al año 1675, cuando Hooke formuló su célebre ley de proporcionalidad elástica entre las fuerzas y las deformaciones (tratado en el anterior apartado 1.4). En paralelo, Hooke estudió la mecánica estructural del arco mediante unos interesantes experimentos para obtener la forma con la cual resolver un arco ideal, consiguiendo, así, que trabaje únicamente a compresión, estando sometido sólo a la acción de su peso propio («línea de compresiones»), mediante **la forma inversa de la catenaria** («lí-

[5] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 57 y 128.

[6] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 284.

nea de suspensión»)^{[7][8][9][10][11][12][13]}. Fue Hooke quien estableció el «principio de la inversión catenária», que supuso un gran avance para definir el trazado ideal de un arco. Lo que exponía así:

“Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido”, argumento que Hooke pronunció en 1675 en latín: “*ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum.*”

Robert Hooke (1675), citado por [Mas-Guindal 2011, 40].

Estas palabras no fueron desveladas hasta el año 1705, una vez Hooke muerto, ya que en su libro^[14] del año 1675, lo había publicado de forma enigmática con el acertijo según el logogrifo que se describe a continuación, *abcccddeeeefggiiiiiii-llmmmmnnnnnooprssstttttuuuuuuuvx*, para así, no dar la solución a la pregunta que había planteado unos años antes en la *Royal Society* de Londres, acerca de cuál era la forma ideal para definir la geometría de un arco^{[11][15][16][17]}. No obstante, en 1670, los matemáticos y físicos Leibniz, Huygens y Johann Bernoulli ya habían estudiado el problema del hilo cargado, pero fueron muy reservados con el trabajo realizado^{[11][12]}. Con su demostración, Hooke estableció la relación entre una forma funicular trabajando a tracción (hilo tenso) o la forma de un arco o antifuncular trabajando a compresión, mostrado en la figura 1.5-4.

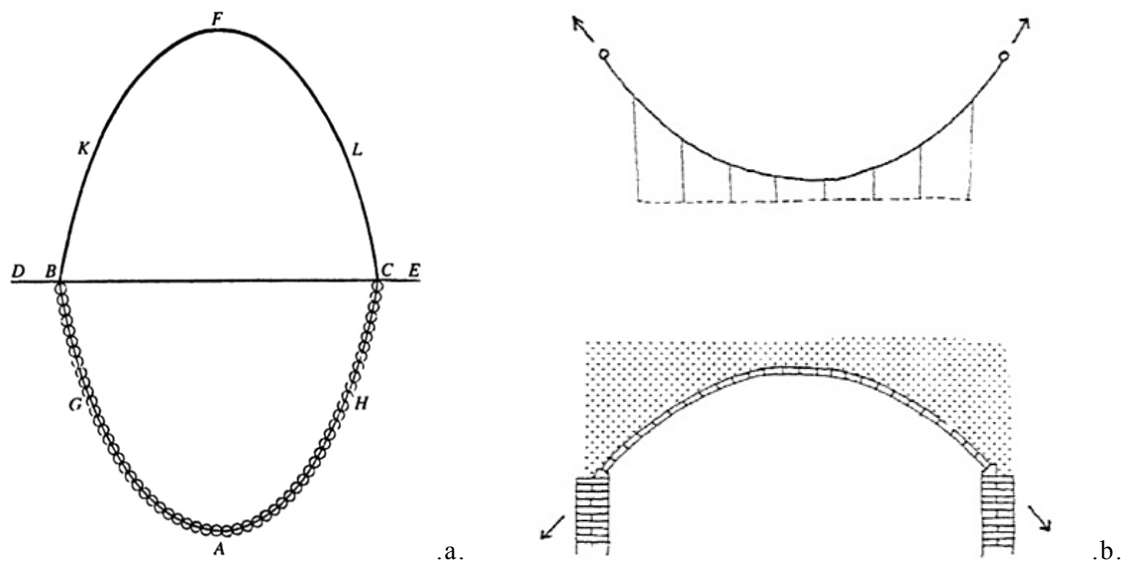


Figura 1.5-4. a) Dibujo de [Poleni 1748] acerca de la analogía de Hooke entre una cadena colgante y un arco, b) Parábola y arco según una carga horizontalmente uniforme. (Imágenes tomadas de [Heyman 1995/a, 7] y [Brufau Niubó 2011/a, 54] respectivamente).

- [7] Brufau Niubó, R.; Blasco Casanovas, J.R. (2009). *El principi de la inversió. A propòsit de la Sala Polivalent de Mannheim*, p. 73.
- [8] Engel, H. (2001). *Sistemas de estructuras*, p. 120.
- [9] Huerta Fernández, S. (2001). *Mechanics of masonry vaults: The equilibrium approach*, p. 50.
- [10] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 75.
- [11] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, pp. 36 y 37.
- [12] Mas-Guindal, A.J. (2011). *Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*, p. 40.
- [13] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 121.
- [14] Hooke, R. (1675). *A description of helioscopes, and some other instruments*, p. 31.
- [15] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.
- [16] Heyman, J. (1995/a). *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture*, p. 7.
- [17] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 214.

Como indica Ibáñez ^[18], si se estudia el principio de la inversión catenária, el resultado obtenido es un arco ideal, que debido a su geometría, se sostiene a sí mismo, siendo la forma más óptima, y en el cual el diagrama de esfuerzos (fuerzas de compresión) es el opuesto al diagrama de la catenaria (fuerzas de tracción). En acepción a José Gómez Serrano, según las cargas solicitantes, el arco resultante toma una forma distinta:

“El arco catenario es la forma que adopta una cadena cuando se cuelga de dos puntos y sólo soporta su peso propio. Si la carga que soporta es horizontalmente uniforme, al colgarla de dos puntos adopta la forma de parábola. Si soporta diferentes cargas puntuales, la cadena o cable adopta la forma denominada «arco funicular».

Las formas inversas de los arcos colgantes catenarios, funiculares o parabólicos, que soportan su peso propio o cargas y que siempre están traccionados, corresponden a las formas comprimidas que, con las mismas longitudes, soportarían las mismas cargas.”

[Gómez Serrano 2002, 97].

En su libro, Muttoni ^[19] expone este concepto haciendo la analogía entre un cable colgando de sus extremos y un arco para el caso de dos cargas verticales simétricas y el caso de una carga horizontal uniformemente distribuida, como se muestra en la figura 1.5-5.

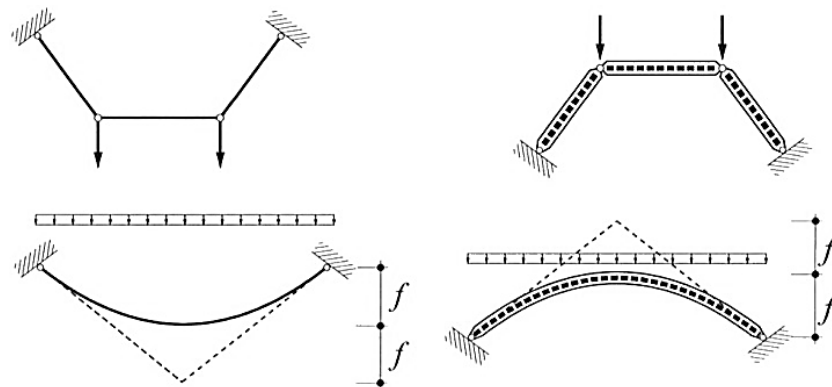


Figura 1.5-5. Analogía de un cable y un arco para un estado de dos cargas simétricas y para un estado de carga horizontal uniformemente distribuida. (Imágenes tomadas de [Muttoni 2011, 72]).

Con este ejemplo Muttoni ^[19] plantea que “la similitud entre cables y estructuras sometidas a compresión es válida independientemente del tipo de cargas aplicadas. Por ello, en estructuras bajo compresión el polígono funicular conserva toda su importancia: la forma ideal de un arco se asimilará a la de un cable sujeto para las mismas cargas, pero simétricamente invertida”, planteamiento al cual Block, DeJong y Ochsendorf ^[20] añaden la siguiente argumentación:

“Tanto la cadena colgante como el arco deben de estar en equilibrio, y las fuerzas son simplemente invertidas. La cadena puede soportar solamente tracción, y el arco de mampostería actúa a compresión. Generalmente, esta idea significa que la forma que adopta una cadena bajo la acción de un conjunto de cargas, si se rigidiza y se

[18] Ibáñez Torres, R. (2003/04). *El vientre de un Arquitecto (la búsqueda de la forma)*, p. 157.

[19] Muttoni, A. (2011). *The Art of Structures. Introduction to the Functioning of Structures in Architecture*, p. 72.

[20] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.

invierte, muestra la manera de resistir las fuerzas de compresión de una estructura arqueada para soportar el mismo conjunto de cargas. La forma de la cadena y el arco catenárico se llaman forma *funicular* para estas cargas.”

[Block et al. 2006, 14].

Salvadori y Heller ^[21] explican este concepto relacionando la forma parabólica que se obtiene de un cable colgando bajo la acción de una carga distribuida sobre la horizontal con la forma ideal de un arco sometido a las mismas cargas de la siguiente manera:

“Si se invierte la forma parabólica que toma un cable sobre el cual actúan cargas uniformemente distribuidas según su horizontal, se obtiene la forma ideal de un arco que sometido a este tipo de carga desarrolla sólo tensiones de compresión. [...] La forma ideal de un arco capaz de resistir cargas determinadas por un estado de compresión simple puede hallarse siempre con la forma del polígono funicular correspondiente, invertido.”

[Salvadori et al. 1998, 84].

David Gregory (1659-1708), sobrino de Hooke, continuó con los estudios de la inversión catenárica para el estudio de arcos, en el siglo XVII, describiendo matemáticamente la forma de la catenaria ^[22], con la ayuda de **Isaac Newton** (1642-1727), y unos veinte años más tarde, amplió el principio que había pronunciado inicialmente Hooke acerca del arco catenárico ^{[23][24]}. En descripción de Jacques Heyman, Gregory añadió el siguiente postulado, traducido del texto original en latín por Ware ^[25]:

“En un plano vertical, pero en posición invertida, la cadena conservará su forma sin caer y, por consiguiente, constituirá un arco o fornix muy delgado; es decir, infinitas esferas pequeñas, rígidas y pulidas, dispuestas según la forma de una catenaria invertida formando un arco; ninguna de sus partes será empujada hacia fuera o hacia dentro por las otras, y si la parte más baja permanece firme, se soportará a sí misma gracias a su forma. Porque, dado que la situación de los puntos de la catenaria es la misma, y también lo son las inclinaciones de sus partes respecto al horizonte, tanto (si cuelga) como si está en situación invertida, de manera que la curva esté en un plano perpendicular al del horizonte, es evidente que mantendrá invariable su forma, en una situación como en otra. La verdadera y legítima forma de un arco o fornix no es otra que la catenaria. *Y cuando un arco de cualquier otra forma se sostiene es porque hay alguna catenaria en su espesor.* Y no se sostendría si fuera muy delgado o estuviera compuesto de partes muy pulidas, que pudieran deslizar. [...] Se puede calcular la fuerza con que un arco o arbotante empuja hacia fuera el muro sobre el que apoya. Porque lo mismo ocurre con la componente horizontal de la fuerza que sostiene la cadena, ya que la fuerza que en ésta actúa hacia dentro, en el arco actúa hacia fuera.”

Principio de David Gregory (1697), citado por [Heyman 2001, 37].

Cabe indicar que la frase en cursiva de la cita anterior la añadió el arquitecto **Samuel Ware** (1781-1860) en el momento de realizar la traducción del texto, po-

[21] Salvadori, M.; Heller, R. (1998). *Estructuras para Arquitectos*, p. 84.

[22] Gregory, D. (1697).

[23] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 76.

[24] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 214.

[25] Ware, S. (1809). *A treatise of the properties of arches, and their abutment piers*.

tenciando de forma explícita el concepto que argumenta Gregory mostrando, así, su profundo conocimiento acerca del arco catenárico, en busca de la comprensión y el análisis de dicha temática, para hallar la fuerza horizontal de empuje del arco sobre el soporte o estribo que será igual a la fuerza de tracción hacia el interior en los extremos de una cadena, tal y como cita Robert Brufau Niubó:

“[...] Las fuerzas hacia el interior en los extremos de la cadena son las mismas que en los extremos de un arco empujando hacia fuera [...]”

David Gregory (1697), citado por [Brufau Niubó 2011/a, 54].

Los estudios y conocimientos de Hooke sobre la catenaria y su inversión, le permitieron contribuir de forma activa y determinante en los proyectos que colaboraba como consultor de estructuras²⁶ de edificación, siendo objeto de debate el grado de participación y de influencia de Hooke en los proyectos en los cuales figura como colaborador. Hooke tuvo una gran participación, después del gran incendio de 1666 en la ciudad de Londres, en distintos proyectos arquitectónicos de los que cabe enumerar la iglesia de Willen, el hospital Real de Bethlem en Moorfields (1675), el Monumento al gran incendio de Londres (1677), la rehabilitación de *Barbers Surgeon's Hall* (1672), el edificio del Real Colegio de Físicos (1679), el observatorio Real de Greenwich (1675), el edificio del Real Colegio de Médicos, entre otros, y especialmente su contribución en el diseño de la cúpula de la catedral de *Saint Paul* de Londres^{[27][28]}. En el diseño de la catedral de *Saint Paul*, que se muestra en la figura 1.5-6, la construcción de la cual se inició en 1675 y se inauguró en 1708, obra del arquitecto **Christopher Wren** (1632-1723), parece ser, que el papel de Hooke en el diseño de la triple cúpula de dicha edificación tuvo que ser de gran relevancia dadas sus características geométricas y resistentes, así como, sus grandes dimensiones, con un diámetro de 31 metros y una altura de 111 metros en su coronación.

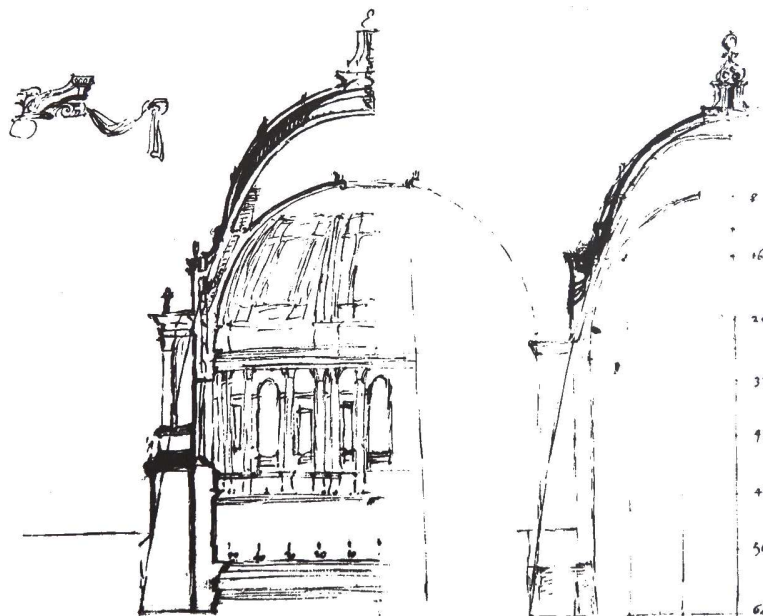


Figura 1.5-6. Dibujos del arquitecto Wren para el diseño de la cúpula de *Saint Paul* de Londres. (Imagen tomada de [Mainstone 1975, 289]).

²⁶ Como expone Robert Brufau Niubó, se puede considerar que Hooke era consultor de estructuras, de hecho plantea si realmente fue el primer consultor, conocido, de la historia de estructuras en la edificación en su artículo [Brufau Niubó 2011/a, 49-57].

[27] Brufau Niubó, R. (2011/a). *Robert Hooke, el primer consultor estructural?*, p. 51.

[28] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 49.

Para el diseño y construcción de la triple cúpula de la catedral de *Saint Paul*, fue necesario el profundo conocimiento, de las beneficiosas **propiedades de la inversión catenária** que tenía Hooke, extrapolando, así, el principio de la catenaria al espacio en forma de cúpula, como la geometría resultante de la revolución tridimensional de un arco bidimensional ideal en torno a su eje central vertical ortogonal a la planta ^{[29][30]}. En la figura 1.5-7, se muestra la forma proyectada para el diseño de la cúpula de la catedral de *Saint Paul*, la cual responde a este **concepto de optimización y eficiencia estructural**, en base al principio de la inversión catenária, difiriendo de las geometrías convencionales de las grandes cúpulas anteriormente proyectadas y construidas, **al proponer un diseño que trabaja, principalmente y de forma conjunta, a esfuerzos de compresión (axial puro) con el mínimo empuje**. Como indica Heyman ^[30], “la diferencia esencial reside en la inclinación de la estructura de apoyo, ya que el tambor de fábrica no se eleva en vertical, sino que sigue la línea de la cadena colgante de Hooke, en tridimensional”.

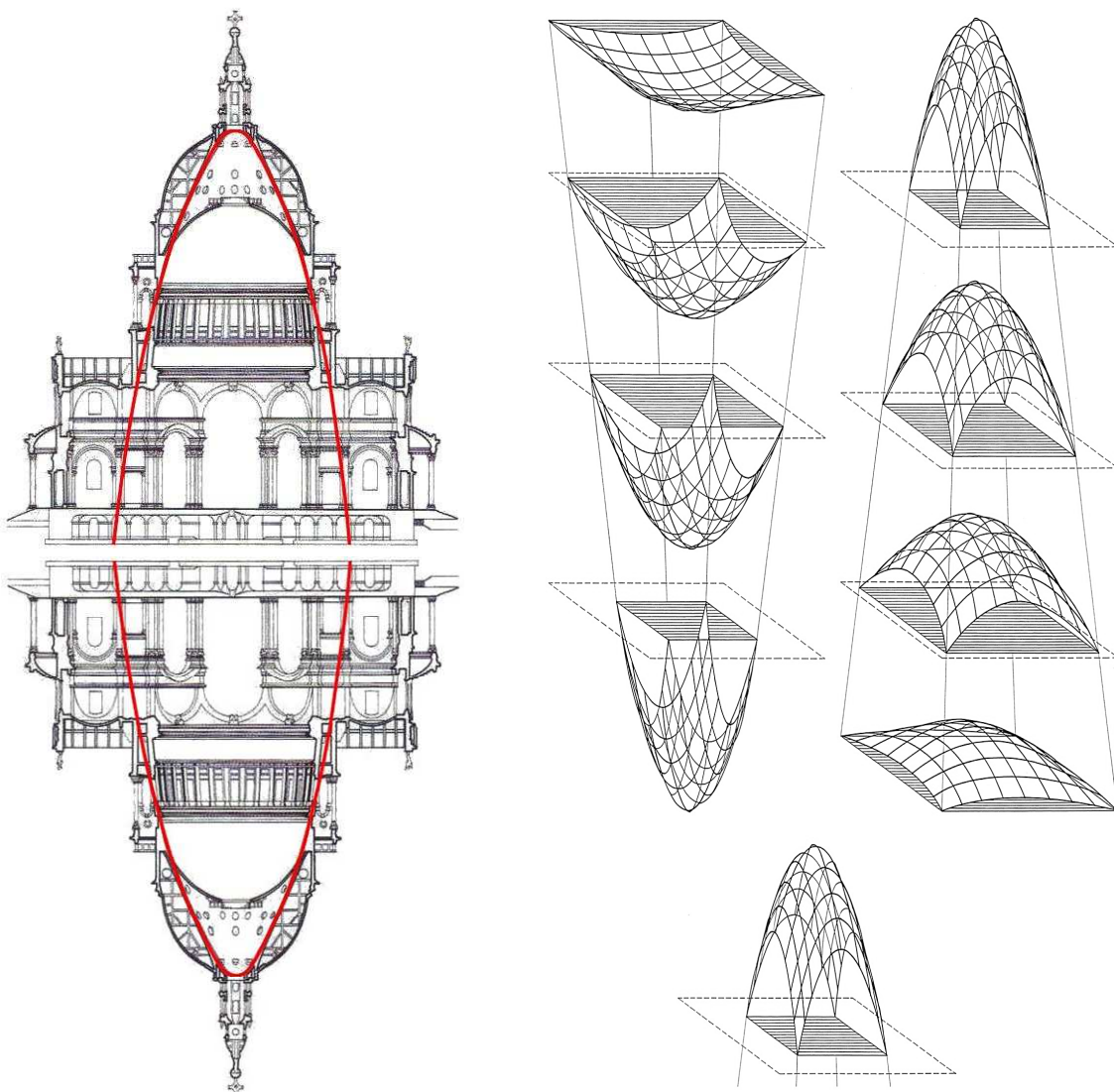


Figura 1.5-7. Sección transversal de la catedral de *Saint Paul* en la cual se observa como la triple cúpula que se asemeja a una catenaria invertida, mostrada en la geometría inferior de la imagen de la derecha. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 2011/a, 55] y [Engel 2001, 122] respectivamente).

^[29] Brufau Niubó, R. (2011/a). *Robert Hooke, el primer consultor estructural?*, p. 54.

^[30] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 49.

La colaboración de Hooke en el diseño de la triple cúpula de la catedral de *Saint Paul* de Londres la argumenta Robert Brufau Niubó, de la siguiente manera:

“[...] Opino que la forma de la cúpula interna de fábrica de ladrillo no podría ser proyectada sin unos conocimientos previos de máximo nivel alcanzados hasta el momento, y estos los tenía Hooke. Hay que pensar que todas las grandes cúpulas levantadas con anterioridad estaban hechas con formas mucho más convencionales y un trazado tan apuntado sólo podría entenderse a partir de un conocimiento profundo de las fantásticas propiedades de la inversión catenária. Esta estrategia de análisis fue “inventada” precisamente por Hooke, cuando, en el año 1674, anunció su principio respecto como debería de ser un arco ideal, [...]”

[Brufau Niubó 2011/a, 54].

Por desgracia, y quizás de forma sorprendente, Wren ocultó la geometría de la cúpula catenária, en base al principio de Hooke, de la catedral de *Saint Paul* con una cúpula inferior de geometría semiesférica, siendo únicamente visible la cúpula catenária desde la *Whispering Gallery*, la cornisa interior en la base del tambor [31][32].

En 1742, una cúpula de la arquitectura clásica de mayores dimensiones que la mencionada cúpula de *Saint Paul*, como es la cúpula de la Basílica de San Pedro de Roma, tomó protagonismo ante la evidente alarma que se generó con las grietas aparecidas en dicha cúpula. El papa Benedicto XIV solicitó a tres matemáticos realizar un informe para determinar los motivos del estado de agrietamiento de la cúpula y si suponían un peligro para su estabilidad. Este hito histórico es definido, por varios autores, como un punto de inflexión en la historia de la ingeniería civil, al considerar que surgió de esta fecha la idea de que se podían hacer cálculos numéricos para el correcto análisis de una estructura existente en términos de su equilibrio estático. Llevando más allá los conocimientos y principios fundamentales, de mayor relevancia e influyentes, desarrollados hasta la fecha como son los trabajos de equilibrio estático de Leonardo da Vinci, los conocimientos de Resistencia de Materiales de Galileo o la ley de la Elasticidad de Hooke, entre otros [33][34][35].

En este nuevo contexto, fue finalmente el físico y matemático italiano **Giovanni Poleni** (1683-1761), en 1748, quien realizó el correspondiente informe [36] para analizar la seguridad y certificar el agrietamiento de la cúpula de San Pedro de Roma. Para lo cual, Poleni utilizó los conocimientos adquiridos después de revisar el estado de conocimientos de la construcción en fábrica a medianos del siglo XVIII, de acuerdo a su analogía entre la cadena colgante de Hooke, que adopta la forma de una catenaria a tracción bajo la carga de su peso propio, y un arco que trabaja a compresión [32][37][38][39][40], como se describe a continuación en acepción a Jacques Heyman:

[31] Brufau Niubó, R. (2011/a). *Robert Hooke, el primer consultor estructural?*, p. 55.

[32] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, pp. 47-49.

[33] Mainstone, R.J. (1975). *Developments in structural forms*, pp. 283-290.

[34] Millais, M. (2005). *Building structures, from concepts to design*, p. 9.

[35] Straub, H. (1952). *A History of Civil Engineering*, pp. 111-116.

[36] Poleni, G. (1748).

[37] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.

[38] Heyman, J. (1966). *The stone skeleton*, pp. 249-279.

[39] Heyman, J. (1995/b). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*, p. 315.

[40] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 103.

“Poleni comienza revisando el estado de conocimientos del momento sobre construcción de fábrica; su erudición es amplia y, desde luego, conoce la cadena colgante de Hooke. Poleni observa que las grietas meridianas existentes habían dividido la cúpula en partes con forma aproximada de lunas semiesféricas («semi-gajos» de naranja) y la cuestión a responder era si estas grietas eran peligrosas o no.”

[Heyman 2001, 47].

Poleni analizó la estructura real de la cúpula de San Pedro, unos doscientos años después de su culminación, para realizar un informe acerca de las numerosas grietas meridionales aparecidas, desde la base hasta prácticamente su coronación, como se aprecia en la figura 1.5-8a, en dicha cúpula proyectada por el arquitecto, escultor y pintor italiano **Miguel Ángel** (1475-1564) en 1546 y construida después de su muerte por **Domenico Fontana** (1543-1607) y **Giacomo della Porta** (1540-1602) entre 1588 y 1590, quienes continuaron con la reconstrucción de la Basílica desde 1573 ^[41].

Poleni utilizó el principio de la cadena colgante de Hooke, ya comentado, para evaluar la seguridad de la bóveda agrietada y determinar, así, si las grietas suponían un riesgo, afirmando, en su informe, que “la estabilidad (de la cúpula) está asegurada si se puede demostrar que la obra puede contener la totalidad de la línea de presiones” como cita Serrallonga ^[42].

Para el análisis de la cúpula, Poleni la dividió hipotéticamente, según las grietas existentes, en 50 porciones en forma de semi-husos esféricos o «semi-gajos» para considerar el equilibrio de un arco formado por uno de éstos semi-husos y su simétrico. Completando, así, un arco casi bidimensional cuyo ancho disminuía hasta cero en la clave, como se muestra en la figura 1.5-8b, al darse cuenta de que la cúpula tenía mayor dimensión en la base que en la coronación ^{[42][43][44][45][46]}.

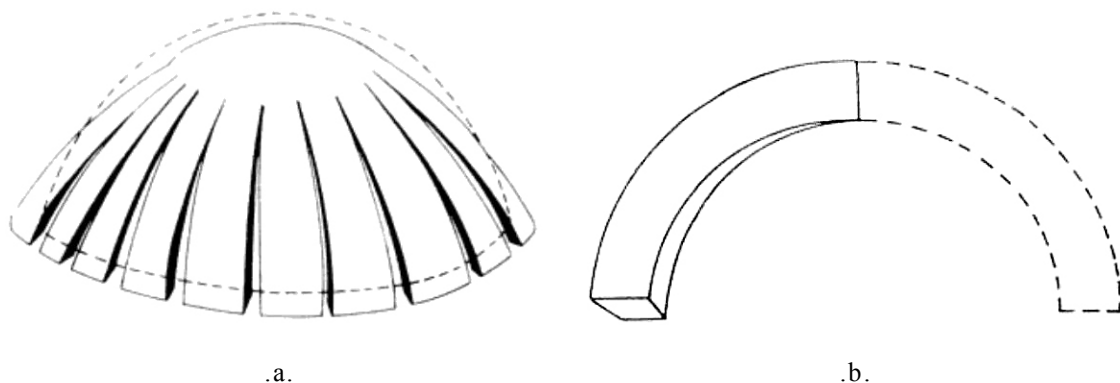


Figura 1.5-8. a) Esquema del agrietamiento de una cúpula debido al incremento de la luz. b) Arco bidimensional de «semi-gajo» cortado de una cúpula. (Imágenes tomadas de [Heyman 1995/b, 317 y 315] respectivamente).

Poleni dividió cada semiarco en 16 partes y colgó, de un hilo flexible, 32 pesos desiguales, a escala y proporcionales al peso correspondiente de la sección de la cuña de arco, así como la carga puntual de la linterna en la parte superior de la

[41] Ackerman, L. (1997). *Development, transition or transformation: the question of change in organisations*, pp. 193-221.

[42] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 103 y 104.

[43] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.

[44] Heyman J. (1966). *The stone skeleton*, pp. 249-279.

[45] Heyman, J. (1995/b). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*, p. 315.

[46] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 47.

cúpula. Poleni mostró que la cadena colgante resultante invertida cabía dentro de la sección de la cúpula dibujada a escala ^{[47][48]}, como se infiere de la figura 1.5-9b.

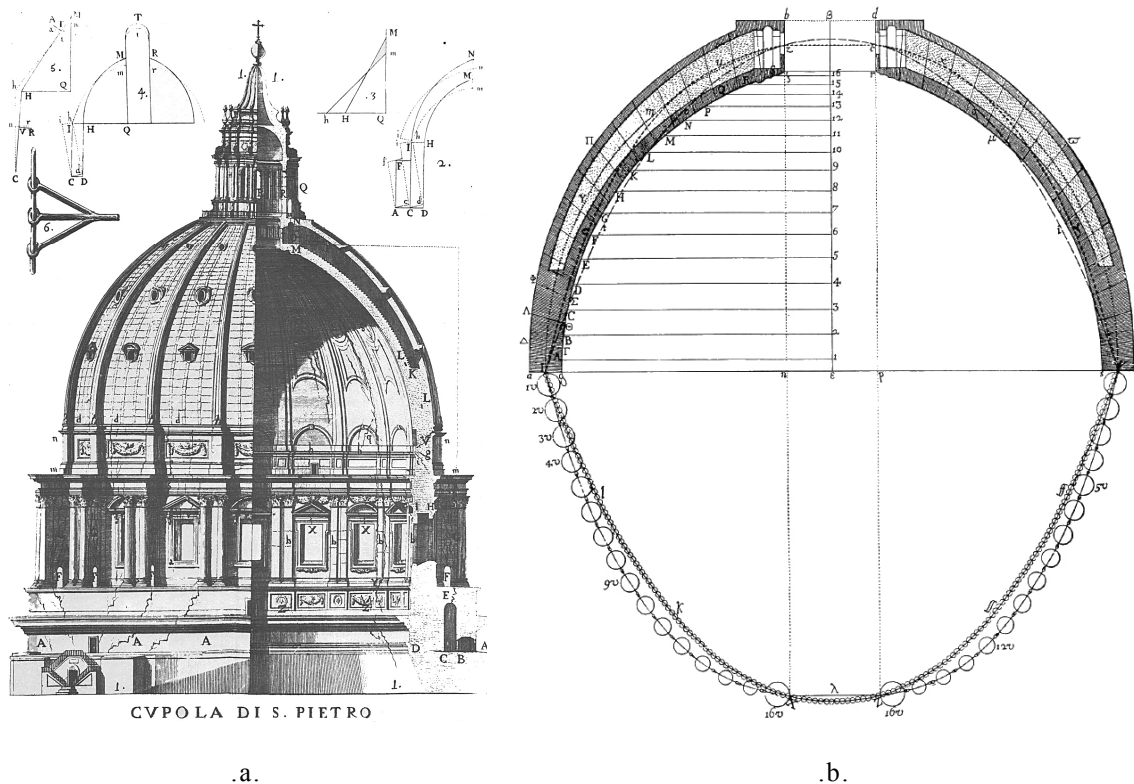


Figura 1.5-9. a) Cúpula de San Pedro de Roma agrietada y la base del análisis estático de su estabilidad, b) Análisis realizado por Poleni, en 1748, con métodos grafostáticos para el informe sobre su estabilidad. (Imágenes tomadas de [Mainstone 1975, 291] y [Serrallonga Gasch 2003, 104] respectivamente).

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, se infiere que si la línea de presiones se encuentra dentro de la mampostería en todas las secciones, los esfuerzos actúan dentro de la fábrica para dicho estado de cargas demostrando, así, que el arco era seguro, de acuerdo al «teorema de la seguridad», y en consecuencia también lo sería la cúpula completa, agrietada, o no ^[48].

En este punto cabe hacer un inciso para postular que, la metodología de Poleni, implica la existencia de una superficie envolvente cupular que integra a todas las inversiones-“gajo”-catenarias analizadas como modelo de seguridad de la cúpula. Es decir, se puede estimar la propuesta de esta **superficie envolvente cupular de integración inversa de la catenaria** como una aproximación, **formalmente válida**, a la superficie de revolución de la inversión catenaria de seguridad, a considerar como una primera aportación, *ad hoc*, conceptual para esta Tesis.

La solución propuesta por Hooke para resolver el problema de la forma ideal para definir la geometría de un arco estático de fábrica, planteó la primera tarea primordial para definir la **línea de empujes**⁴⁹ de un arco. Gregory realizó una observación complementaria para describir este concepto fundamental de un arco al ar-

^[47] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometría i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 103 y 104.

^[48] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 47.

⁴⁹ La línea de empujes entendida como “la línea que forma el lugar geométrico de los centros de empuje”, [Huerta 2005, 75]. Este concepto se aborda con mayor profundidad en el siguiente apartado.

gumentar que si el eje del centro de gravedad de un arco de mampostería no se genera en base a la línea de empujes, entonces, el arco sólo será estable para un estado de cargas para el cual la línea de empujes se encuentre completamente en el grosor del arco a lo largo de la sección, como describe Kurrer ^[50].

Dado que la fábrica debe trabajar a esfuerzos de compresión, es obvio que la línea de empujes debe de estar contenida dentro del grosor del arco. Se puede imaginar cada dovela actuando contra las otras dos sólo a través de los centros de empuje. Si se da la vuelta al arco, lo que eran fuerzas de compresión se transforman en fuerzas de tracción: las dovelas al igual que una cadena ^[51].

La gran diferencia radica en que el funicular genera su forma de acuerdo a las cargas actuante, como es el caso de un hilo adoptando la forma de catenaria debido a su peso propio. No es así con el arco, que tiene una forma rígida, independientemente de las cargas que le solicitan, he aquí donde radica el problema principal en el diseño del arco frente a la variación de cargas. Esta problemática sirvió a Hooke para establecer la base de la mecánica elástica ^[52]. En 1687 Newton encontró una primera solución al problema de la catenaria fruto de sus investigaciones sobre sólidos de mínima resistencia. También en 1687, **Pierre Varignon** (1654-1722) menciona el polígono funicular de Stevin ^[53].

Refiere Ibáñez ^[54] que, a pesar de la óptima calidad del arco catenático como se infiere de la anteriormente expuesto, durante mucho tiempo se consideró que tenía formas poco elegantes y no se utilizó en la arquitectura tradicional, y en su lugar se utilizaron arcos semicirculares, elípticos, apuntados, etc., aunque sí fue utilizada en ocasiones en la ingeniería, en relación con la construcción de puentes. El gran propulsor de esta tipología estructural tan óptima, y uno de los máximos exponentes del arco catenático y otras formas antifuniculares, fue **Antoni Gaudí Cornet** (1852-1926), el célebre arquitecto catalán, que centró su obra en el estudio y la búsqueda de la función de la forma, convirtiéndose en uno de los arquitectos más valorados de todos los tiempos.

Es evidente que el arco catenático, fruto del principio de la inversión, se basa en el principio de optimización de acuerdo a las estructuras que trabajan por su forma, con el objetivo de obtener, así, geometrías que trabajen únicamente a esfuerzos axiales, donde antes eran fuerzas de tracción («línea de suspensión»), ahora son fuerzas de compresión («línea de compresiones»). **Dicho comportamiento estructural es posible al tomar el eje de dicha geometría la forma de la trayectoria de las líneas isostáticas en base a las direcciones de tensiones principales**, disminuyendo de forma significativa los esfuerzos de flexión y cortante ^[55]. Esta lógica conceptual fue utilizada ampliamente por Gaudí, pero también por otros arquitectos e ingenieros como Frei Otto (1925-) o Heinz Isler (1926-2009) como se tratará posteriormente, o el propio Poleni, mencionado anteriormente, para llevar a cabo sus estimaciones, en sus proyectos y sus obras arquitectónicas, dando credibilidad a la teoría de Hooke acerca del principio de la inversión catenática ^[56].

En realidad existe un elenco de arquitectos e ingenieros significativos más amplio, en base a ésta línea de análisis estructural, que no se pueden obviar, dadas sus exce-

^[50] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 214.

^[51] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, pp. 75 y 76.

^[52] Mas-Guindal, A.J. (2011). *Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*, p. 40.

^[53] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 56.

^[54] Ibáñez Torres, R. (2003/04). *El vientre de un Arquitecto (la búsqueda de la forma)*, p. 155.

^[55] Brufau Niubó, R.; Blasco Casanovas, J.R. (2009). *El principi de la inversió. A propòsit de la Sala Polivalent de Mannheim*, p. 73.

^[56] Brufau Niubó, R. (2011/a). *Robert Hooke, el primer consultor estructural?*, p. 54.

lentes aportaciones a la temática que nos ocupa: Frank Lloyd Wright (1867-1959), Le Corbusier (1887-1965), Eduardo Torroja Miret (1899-1961), Richard Buckminster Fuller (1895-1983), Félix Candela (1910-1997), Eero Saarinen (1910-1961), Eladio Dieste (1917-2000) o Norman Foster (1935-), entre otros, como refiere Ibáñez ^[57].

Sin duda, la gran aportación en el campo del enfoque del equilibrio para el diseño y el análisis de estructuras de fábrica, en base al concepto de la inversión catenária (esfuerzos de tracción y de compresión puros), fue de gran relevancia en el ámbito de la construcción y contó con muchos seguidores y proyectistas como indica Mainstone ^[58]. En las figuras 1.5-10 ab , se aprecia el equilibrio estático de una catenaria y de un arco, mientras que en las figuras 1.5-10 $cdef$ se muestran algunos estudios sobre el equilibrio y la estabilidad de arcos de mampostería, representando las posibles líneas de empujes atendiendo a distintas condiciones geométricas y de equilibrio.

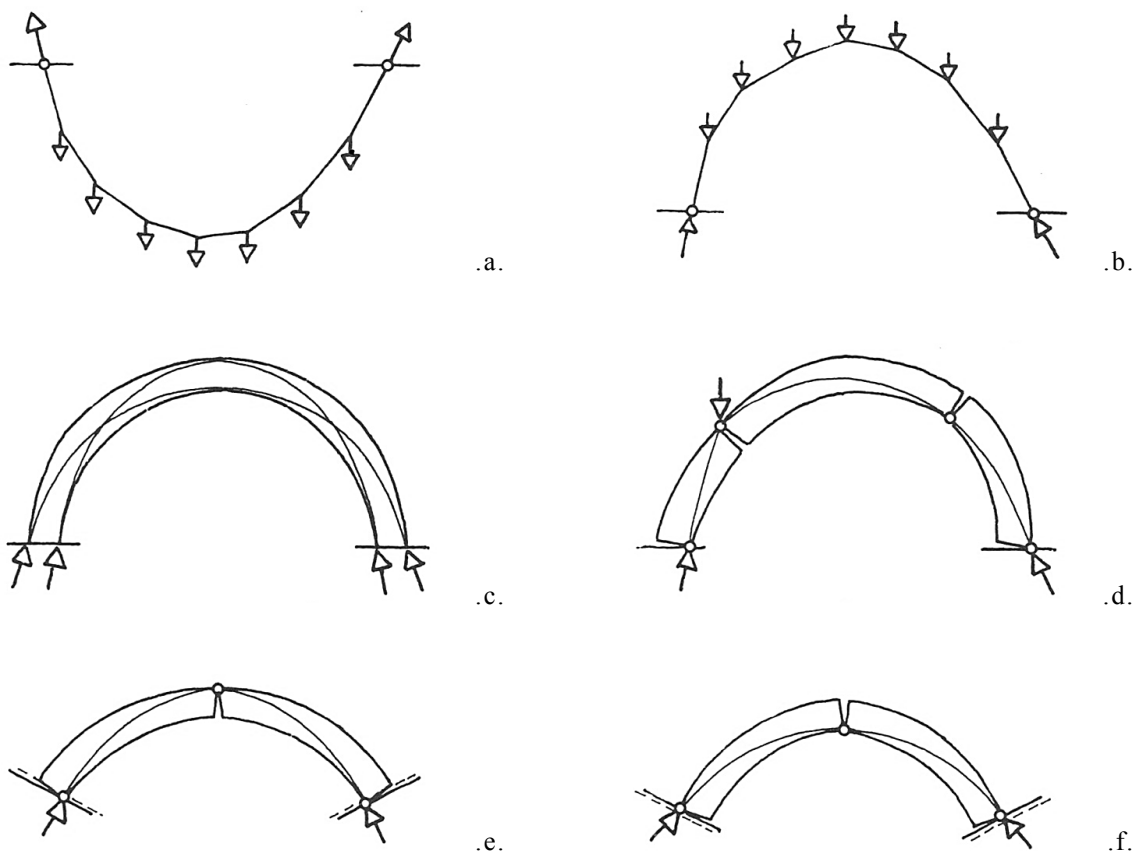


Figura 1.5-10. Equilibrio estático de la catenaria (a) y el arco (b). Las líneas continuas dibujadas dentro del grosor de los arcos son posibles líneas de empujes (c, d, e, f). (Imágenes tomadas de [Mainstone 1975, 39]).

^[57] Ibáñez Torres, R. (2003/04). *El vientre de un Arquitecto (la búsqueda de la forma)*, pp. 157 y 158.

^[58] Mainstone, R.J. (1975). *Developments in structural forms*, p. 39.

1.5.3 Arcos, bóvedas y cúpulas. La línea de presiones y la línea de empujes

El arco catenárico de Hooke, de acuerdo al principio de la inversión que estableció en 1675, ha sido desde su origen una concepción y herramienta potente de análisis en el enfoque del equilibrio en el proyecto de arcos, bóvedas, cúpulas de mampostería y estructuras de fábrica, en general, de uso común y en evolución constatada desde aquella época ^[59]. Como se infiere de lo que sigue, su principio fue de gran utilidad en el campo científico para analizar el comportamiento de los arcos desde su seguridad, en definitiva desde su equilibrio, como planteó en 1748 Poleni al analizar la cúpula de San Pedro en Roma (aspecto analizado en el epígrafe anterior). Ello fue la base para la posterior teorización, que él mismo realizó, acerca de la estabilidad estructural de arcos de todo tipo, según se muestra en la figura 1.5-11.

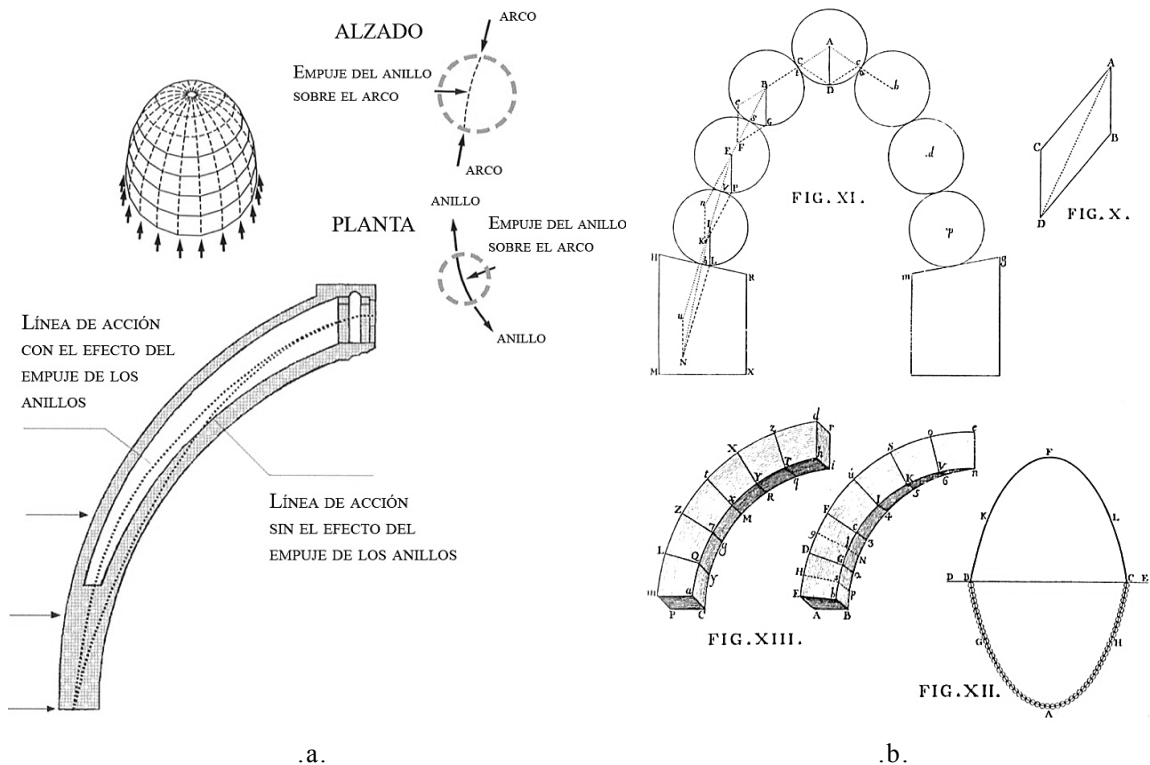


Figura 1.5-11. Estudios de Poleni de la cúpula de San Pedro en Roma, 1748: a) Comparación de la variación de la posición de la línea de presiones con, y sin, el efecto de empuje de los anillos, b) Modelo de arco de mampostería de Poleni. (Notaciones adaptadas de [Muttoni 2011, 99] y [Kurrer 2008, 215] respectivamente).

A raíz de la aportación de Hooke y de Poleni, así como de los avances de sus seguidores que a continuación se abordan, se desarrolló la teorización de modelos para el estudio desde el enfoque del equilibrio para el análisis y proyecto de arcos y estructuras de fábrica. De esta forma, se analiza una tipología estructural ya utilizada en la Edad Antigua mediante el uso de ladrillos secados al sol, inicialmente, y cocidos posteriormente ^[60].

Es de consideración usual en la técnica de la construcción tradicional que los arcos son una tipología estructural, cuya invención se remonta a la antigüedad, con más

^[59] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 88.

^[60] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 34.

de seis mil años desde sus inicios en Babilonia, en la baja Mesopotamia, para la ejecución de construcciones primitivas de puentes y con ejemplos tan majestuosos como el arco de Ctesifonte en la antigua Persia (actual Irak). Los egipcios también hicieron construcciones de este tipo y, en torno a 3000 a.C., utilizaron por primera vez piedras labradas, significando un precedente para la construcción de arcos por parte de los etruscos, que fueron utilizados posteriormente, por los romanos para la construcción de puentes ^{[61][62]}.

No obstante, el análisis de los arcos para establecer su equilibrio y determinar las dimensiones de los estribos para resistir los empujes de dichos arcos es mucho más reciente, en concreto, se inicia en el siglo XVIII, con los estudios de varios científicos como P. de La Hire, B. F. de Bélidor, P. Couplet, C. A. de Coulomb, J. Monasterio, M. G. Lamé, B. P. E. Clapeyron, J. A. Eytelwein, T. Young, F. J. R. von Gerstner, E. Méry, H. Moseley, J. A. Schubert, E. Saavedra, C. A. P. Castigliano, R. Land, E. Winkler, entre otros grandes matemáticos, físicos, ingenieros y arquitectos de la época.

Charles Augustin de Coulomb (1735-1806) no sólo completó el problema estático de la viga en voladizo iniciada por Galileo, a la vez que aportó grandes fundamentos en el empuje de suelos, sino que además contribuyó de una forma relevante acerca de la teoría de los arcos de fábrica con su artículo *Essai sur une application des règles des Maximis et minimis à quelques Problèmes de statique relatifs à l'Architecture*, presentada en 1773 en la Academia de Ciencias de Francia y publicada en las *Mémoires* de la Academia en 1776 ^[63].

A las teorías ya existentes sobre esta temática, Coulomb añadió que es necesario considerar, para el colapso o rotura de los arcos, una posible rotación relativa entre las dovelas además del deslizamiento entre éstas, a la vez que determina con la ayuda del cálculo diferencial, los valores límite para el empuje H necesario para la estabilidad del arco. La máxima aplicación de las teorías sobre arcos de Coulomb se produjo en el siglo XIX, cuando los valores límite del empuje se determinaban con los recién aparecidos métodos gráficos ^{[64][65]}.

En la misma dirección, **Gabriel Lamé** (1795-1870) y **Benoit Paul Émile Clapeyron** (1799-1864) también extendieron la teoría de Coulomb, calculando, con ayuda de las condiciones de equilibrio, la posición del punto de rotura para arcos simétricos de mampostería. También investigaron acerca de la correlativa relación entre el polígono funicular y del polígono de fuerzas ^[66], como se aprecia en la figura 1.5-12, que eran de utilidad, de forma sencilla, para muchas más aplicaciones a diferencia de otros teoremas mucho más complejos. Estos métodos gráficos, que Varignon había publicado póstumamente en 1725 y, por primera vez en la ingeniería de la construcción, se convierten en los teoremas fundamentales de la Estática Gráfica ^[64], como se tratará posteriormente. El libro de Rühlmann ^[67] contiene citas originales de Lamé y Clapeyron en las que se puede apreciar el alto grado asumido:

“Por lo tanto, líneas sucesivas, proporcionales y paralelas a las fuerzas que actúan sobre los vértices de un polígono funicular, formando un polígono secundario (poli-

[61] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 34.

[62] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 75.

[63] Coulomb, C.A. (1773/1776).

[64] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 211, 212 y 311.

[65] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 107-110.

[66] Lamé, G; Clapeyron, B.P.E. (1828). *Mémoire sur la construction des polygones funiculaires*.

[67] Rühlmann, M. (1885). *Vorträge über Geschichte der Technischen Mechanik*.

gono de fuerzas), abierto o cerrado, que posee la propiedad de que las líneas, extendiéndose desde los extremos y los vértices se encuentran en un punto o polo *A*, (figura 1.5-12b), son proporcionales y paralelas a la tracción experimentada por los respectivos lados del polígono funicular propuesto. Este teorema es universalmente aplicable, independientemente de si el polígono funicular es horizontal o inclinado.”

Lamé y Clapeyron (1828), citado por [Rühlmann 1885, 474].

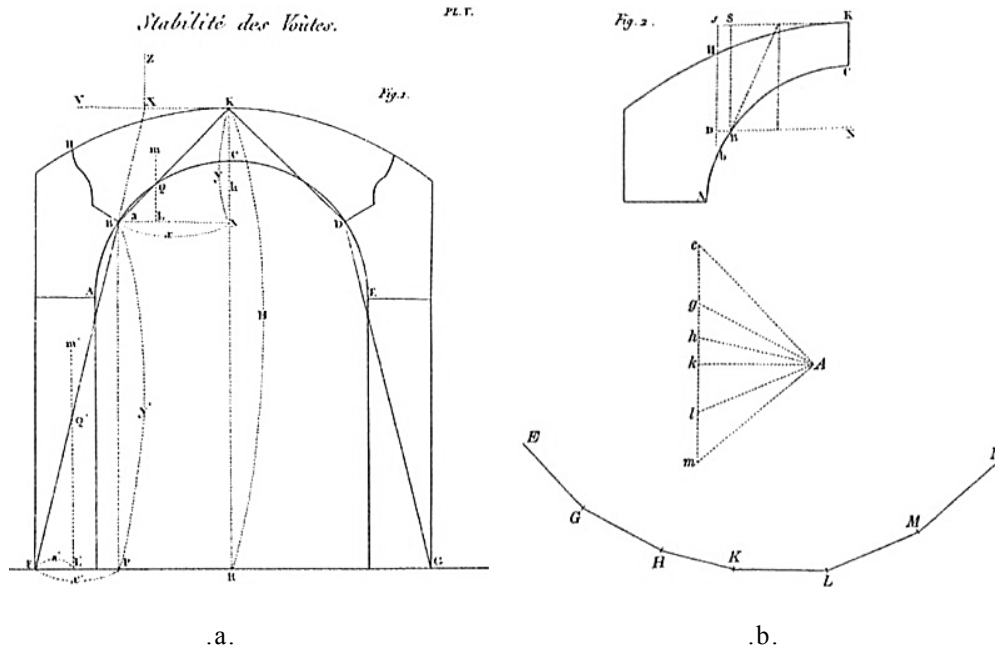


Figura 1.5-12. a) Teoría para el equilibrio de arcos simétricos de mampostería, b) Polígono de fuerzas y polígono funicular según Clapeyron y Lamé. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 311] y [Rühlmann 1885, 473] respectivamente).

De esta forma, Lamé y Clapeyron, en esta primera etapa (década de 1820 a 1830), estaban estableciendo la relación proyectiva entre el polígono funicular y el polígono de fuerzas, que cuarenta años más tarde descubriría **Karl Culmann** (1821-1881) estableciendo la base fundamental de la Estática Gráfica ^{[68][69]}, como se tratará en breve, llevando mucho más allá el descubrimiento de Coulomb ^[70] sobre los arcos de mampostería.

Thomas Young (1773-1829) introdujo el concepto de la curva de resistencia, pero la formulación rigurosa, junto con el polígono funicular y las curvas de presiones, se produjo de forma casi simultánea e independiente, entre 1830 y 1840, por F. J. R. von Gerstner (1831) en Alemania, E. Méry (1840), en Francia, pero con mayor profundidad y rigor por H. Moseley (1835, 1838), en Inglaterra. El método de las líneas de empujes fue ampliado posteriormente por Alfred Durand-Claye (1841-1888) en 1867, entre otros, como indica Serrallonga ^[71].

Así mismo refiere Serrallonga ^[71] que, es de suma relevancia destacar los estudios de **Franz Joseph Ritter von Gerstner** (1756-1832) en el campo del diseño de los

[68] Heyman, J. (1972). *Coulomb's memoir on statics: An essay in the history of civil engineering*, p. 185.

[69] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 311.

[70] Coulomb, C.A. (1773/1776). *Essai sur une application des règles des Maximis et minimis à quelques Problèmes de statique relatifs à l'Architecture*.

[71] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 121, 122, 124 y 461.

arcos, realizados hacia 1830. Junto con sus estudios de puentes colgantes, von Gerstner se centró en el concepto de la catenaria, como se infiere de la figura 1.5-13. Se considera que fue el primero en introducir conocimientos básicos derivados de su investigación acerca de la línea de presiones y la línea de resistencia, que serían desarrolladas con mayor profundidad y rigor por sus seguidores.

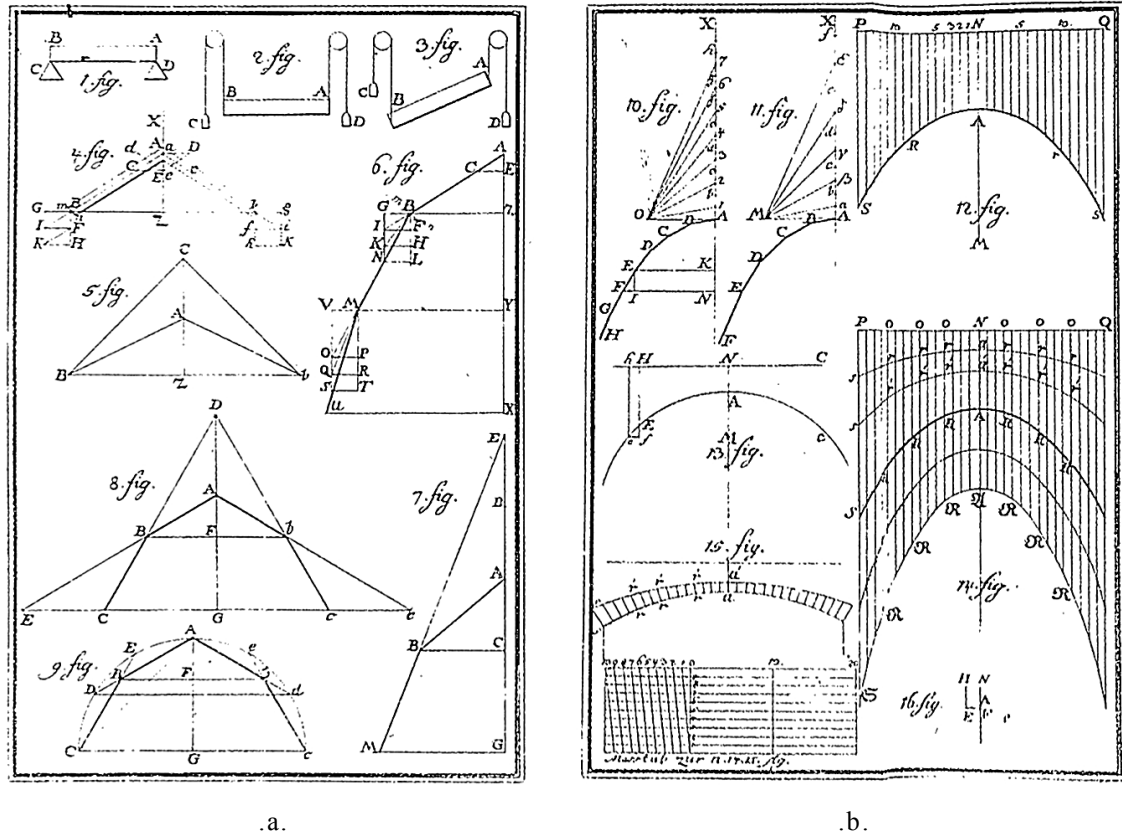


Figura 1.5-13. a) Síntesis del sistema de soporte de la carga para formar el sistema de soporte, b) Estudio infinitesimal para formar el arco catenático según [Gerstner 1789]. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 217]).

No obstante, como expone Serrallonga ^[72], a pesar de que von Gerstner fuera el primero en disertar acerca de los problemas de los arcos mediante la teorización de la línea de presiones y la línea de resistencia de los arcos, se considera que quien planteó por primera la cuestión sobre la posición de la línea de empujes de un arco a compresión pura, para determinar su equilibrio estático, fue **Henry Moseley** (1801-1872), en 1835, con su obra *On the equilibrium of the arch* ^[73]. La línea de empujes, entendida como “la línea teórica que representa la trayectoria de las resultantes de las fuerzas de compresión a través de una estructura de piedra”, como describen Block, DeJong y Ochsendorf ^[74], se puede obtener de acuerdo al principio de la inversión catenática de Hooke enunciado anteriormente.

De acuerdo a dicho planteamiento, Moseley fue el primero en introducir y formular de forma rigurosa el concepto de la línea de empujes, derivada de las fuerzas y tensiones de compresión que se producen en cada punto del arco, como se observa en la figura 1.5-14, el cual podemos asimilar a una sección plana que contenga su

^[72] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 121.

^[73] Moseley, H. (1835).

^[74] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 15.

directriz, existiendo un determinado estado tensional donde la resultante del cual debe ser una fuerza de compresión que produce el empuje ^{[75][76]}.

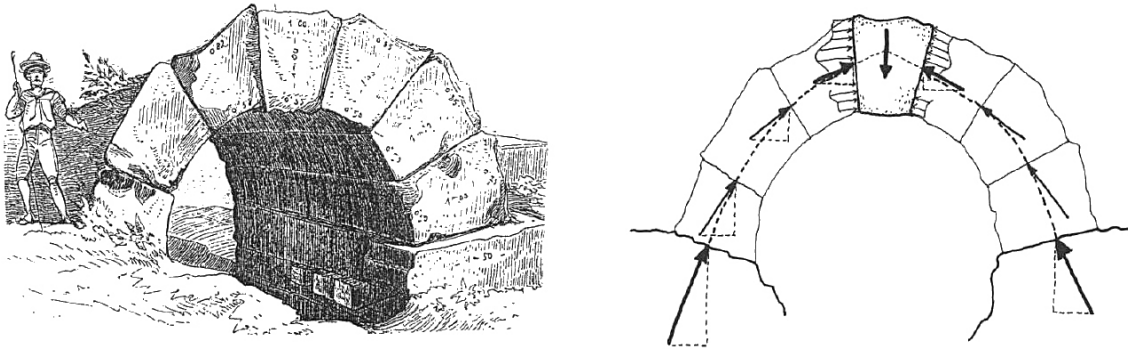


Figura 1.5-14. Arco de dovela etrusca y estudio de equilibrio de las dovelas según [Durm 1885]. (Imágenes tomadas de [Huerta 2005, 75]).

En la figura 1.5-15, se muestra el arco “colgando” de **John Robison** (1739-1805), con el que describe la relación directa entre un arco ^[77], que si se invirtiera, la fuerza de compresión pasaría a ser una fuerza de tracción, como ya se ha expuesto con el principio de la inversión catenárica de Hooke. En la misma figura, se observa una posible línea de empujes de un arco semicircular propuesta por Heyman ^[78].

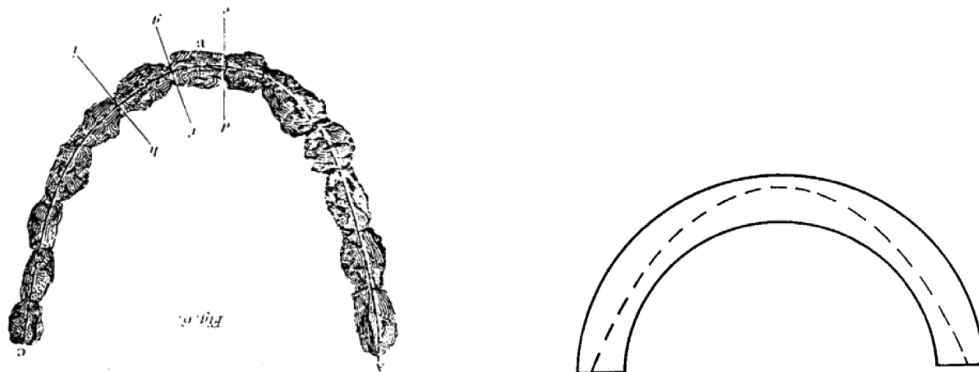


Figura 1.5-15. Arco “colgando” de mampostería de [Robison 1851/1860] y posible línea de empujes de arco semicircular según [Heyman 1995/a]. (Imágenes tomadas de [Huerta 2001, 51]).

La importancia de la línea de empuje reside en que para cada una posible de ellas existe también una posible solución de equilibrio de un arco, permitiendo, así, resolver los principales problemas que plantea un arco desde el punto de vista de la estabilidad. Como describe Huerta ^[76], “el concepto de la línea de empujes permitió resolver los principales problemas de los arcos de fábrica: su diseño para que se mantuvieran en pie y los contrafuertes necesarios para soportar los empujes producidos por dichos arcos, especialmente el segundo problema, que era de gran relevancia, ya que puede suponer el colapso total de la estructura. Para lo cual, es evidente que, es necesario que la línea de empujes esté contenida dentro del grosor del arco de mampostería”.

[75] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 15.

[76] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 75.

[77] Robison, J. (1851/1860).

[78] Heyman, J. (1995/a). *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture*, p. 8.

Moseley extendió su investigación y su trabajo sobre la posición verdadera de la línea de presiones en un arco, introduciendo así, de forma meritoria los métodos de los ingenieros franceses en Inglaterra, además de sus estudios acerca de los problemas indeterminados de la Estática, aplicando el concepto de la «mínima resistencia» en sus resoluciones, así como en el análisis de los arcos en su obra *On the Theory of the Arch* ^[79] (“en la Teoría de los Arcos”), publicado el año 1843 en el primer volumen de *The Theory, Practice and Architecture of bridges...* editado por **John Weale** (1791-1862), donde se muestra que Moseley estuvo muy influenciado por los maestros franceses como Navier y J.-V. Poncelet, entre otros ^{[80][81]}.

De acuerdo a los avances realizados por Moseley, en base a los conocimientos adquiridos previamente de sus predecesores, acerca de la línea de presiones y la línea de resistencia en arcos de mampostería, surge la oportunidad de analizar elásticamente este tipo de arcos. En este contexto el estudio realizado por **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) en 1852, en su obra *Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes* ^[82], sobre el equilibrio de las bóvedas, indica que Poncelet era consciente del problema del cálculo elástico de los arcos de mampostería, y en base a “su revisión histórica de la teoría de los arcos de mampostería propuso la aplicación de la teoría elástica de los arcos de fábrica para obtener una solución única” como expone Huerta ^[83]. Posteriormente, la aportación en este campo fue realizada por distintos autores, como fueron el ingeniero y arquitecto **Eduardo Saavedra Moragas** (1829-1912), en 1860, o los ingenieros **Carlo Alberto Pio Castigliano** (1847-1884), en 1879, con su obra *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et des applications*, en la que aplicó los conocimientos de la teoría de sistemas elásticos para puentes de arcos de mampostería, así como para celosías arqueadas de hierro forjado, como se aprecia en la figura 1.5-16, y por **Robert Land** (1857-1899) en 1888, con el estudio de la línea de influencia para cargas variables sobre arcos de tres rótulas ^{[83][84]}.

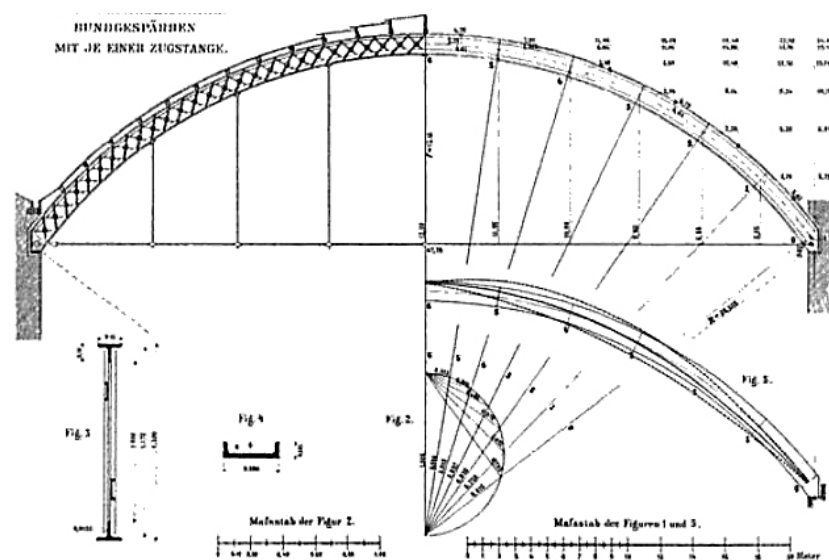


Figura 1.5-16. Celosía arqueada para cubierta con tirante simple según [Castigliano 1886]. (Imagen tomada de [Kurrer 2002, 260]).

^[79] Moseley, H. (1843).

^[80] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 122.

^[81] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 213 y 214.

^[82] Poncelet, J.-V. (1852).

^[83] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 77.

^[84] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 357 y 361.

Pero, como exponen Huerta ^[85] y Kurrer ^[86], sería **Emil Winkler** (1835-1888) quien planteó la discusión en profundidad según el enfoque desde la perspectiva de la Teoría de la Elasticidad y la Resistencia de Materiales, para el cálculo de barras curvadas y arcos de fábrica ^{[87][88][89]}, ya fueran arcos fijos, arcos con dos rótulas o arcos con tres rótulas.

Con el paso del tiempo, y después de varias teorizaciones a cargo de distintos autores, se demostró que el cálculo elástico fue la mejor opción, a pesar de que haya distintos factores o perturbaciones que se traducen en un agrietamiento y deformación del arco, a la vez que pueden afectar a la posición de la línea de empujes. Estas perturbaciones son principalmente como expone Huerta ^[85]: la deformación de la cimbra durante el proceso de construcción, el cedimiento de los estribos bajo la acción del empuje del arco, el fraguado incompleto del mortero en las juntas, y el efecto producido por la variación de temperatura. Winkler era muy consciente de la notable influencia que pueden producir éstos efectos sobre la posición de la línea de empujes de un arco, la cual se debe calcular elásticamente de una forma muy diferente con respecto a la línea de empujes para un estado normal o real, es decir, la línea de empujes calculada sin tener en cuenta dichos efectos. Winkler propuso controlar la posición de la línea de empujes, introduciendo rótulas internas en el arco durante el proceso de construcción ^[85], como se muestra en la figura 1.5-17.

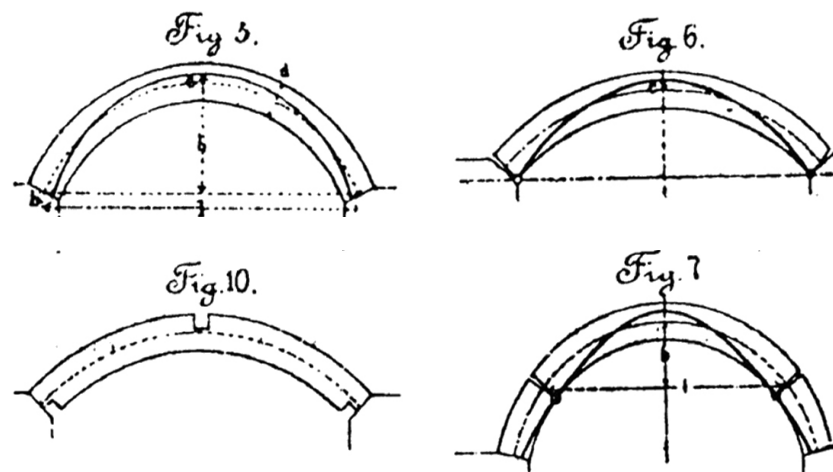


Figura 1.5-17. Desplazamiento de la posición de la línea de empujes debido al cedimiento de los apoyos durante la construcción según [Winkler 1880]. (Imagen tomada de [Huerta 2001, 52]).

Cabe destacar los estudios de mayor relevancia de las últimas décadas en la teoría de los arcos abordado desde el cálculo elástico de acuerdo a los tres pasos que define Heyman ^[90], necesarios para realizar el análisis estructural de los arcos de mampostería y que describe Huerta ^[85]: las ecuaciones de equilibrio, las ecuaciones elásticas, que relacionan los esfuerzos interiores con las deformaciones de las estructuras, y finalmente las consideraciones sobre la compatibilidad de deformaciones. Como indican Block, DeJong y Ochsendorf ^[91], algunas de las aportaciones de

[85] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 77.

[86] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 334 y 338.

[87] Winkler, E. (1858). *Formänderung und Festigkeit gekrümmter Körper, insbesondere der Ringe*.

[88] Winkler, E. (1867). *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit*.

[89] Winkler, E. (1880). *Die Lage der Stützlinie im Gewölbe*.

[90] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*.

[91] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 15.

mayor relevancia en ésta temática se describen a continuación, como son el estudio exhaustivo, desde un punto de vista matemático, de la línea de empujes para el equilibrio de los arcos de fábrica realizado por Milankovitch ^[92], el análisis límite de los arcos de fábrica, Heyman ^{[93][94][95]} y Huerta ^[96], entre otros.

El trabajo de Jacques Heyman es de especial relevancia al tratar puntos de la temática de los arcos de mampostería como son el agrietamiento de un arco tras el descimbrado, el agrietamiento debido a movimientos impuestos en los apoyos, o el comportamiento estructural de los arcos de medio punto de acuerdo al empuje mínimo y al empuje máximo, que ha tratado en distintas publicaciones, artículos y conferencias ^{[93][94][95][97]}. En las figuras 1.5-18 y 1.5-19 se aprecia el comportamiento estructural de un arco de medio punto sometido a su propio peso según Heyman ^[97], para los límites de empuje mínimo y de empuje máximo, ya que no es posible determinar el empuje real del arco ^[98].

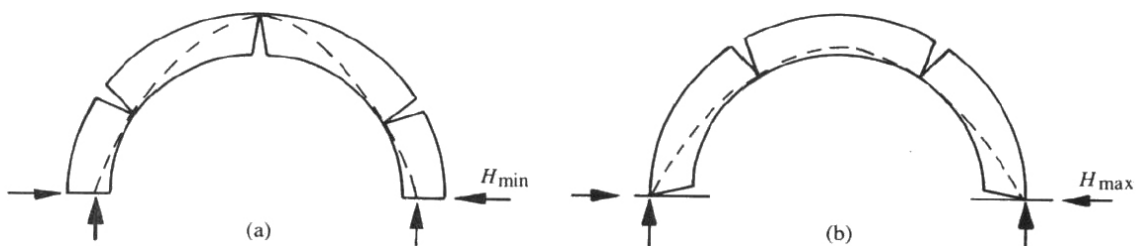


Figura 1.5-18. Arco de medio punto sometido a su propio peso: a) Empuje mínimo, b) Empuje máximo según [Heyman 1995/b]. (Imagen tomada de [Huerta 2005, 78]).

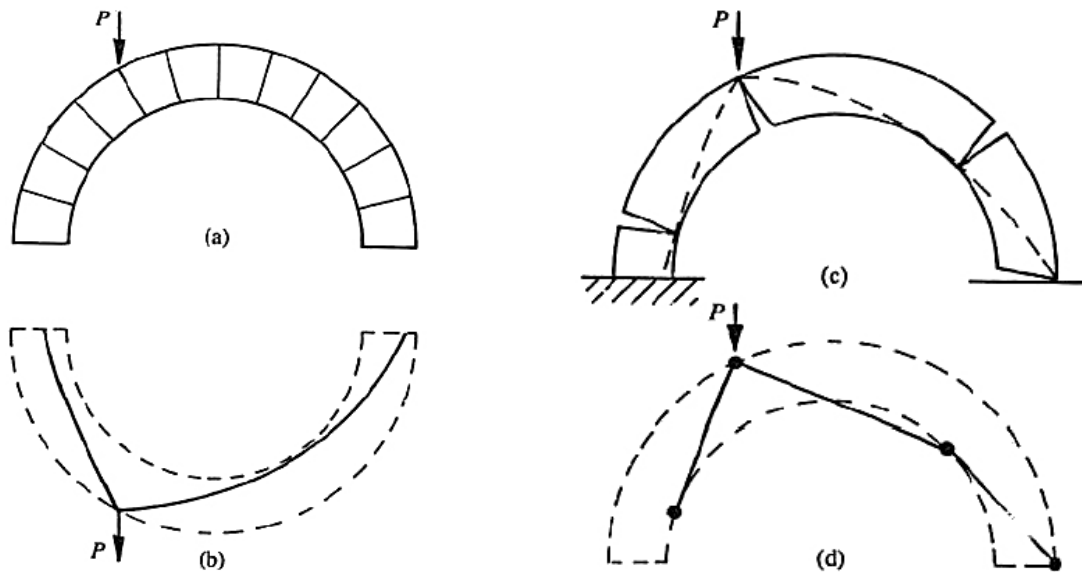


Figura 1.5-19. Colapso de un arco de medio punto bajo un acción puntual según [Heyman 1995/b]. (Imagen tomada de [Heyman 2011, 57]).

^[92] Milankovitch, M. (1907). *Theorie der Druckkurve*.

^[93] Heyman, J. (1966). *The stone skeleton*.

^[94] Heyman, J. (1982). *The Masonry Arch*.

^[95] Heyman, J. (1995/a). *The stone skeleton. Structural engineering of masonry architecture*.

^[96] Huerta Fernández, S. (2004). *Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica*.

^[97] Heyman, J. (1995/b). *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*.

^[98] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 78.

De lo expuesto se infiere que, a su vez, la teorización y el estudio de los arcos a lo largo de la historia es de gran relevancia, ya que su relación con la posterior evolución de los puentes de hierro es muy directa^[99], como enlace con las estructuras de entramado, temática, ésta, que se expone en el siguiente epígrafe.

Por lo tanto, se produce un paralelismo cronológico entre la evolución de la construcción de puentes con arcos de fábrica y la evolución de la construcción de puentes con estructuras de entramado de hierro, con una transición o cambio en el uso de los materiales que se hizo de forma cuasi inmediata. Dicho cambio en el uso de los materiales de construcción, y en consecuencia de las tipologías estructurales para el desarrollo de nuevas estructuras, se produce ante la necesidad de analizar estructuras de entramado con mayor seguridad, y determinar con mayor precisión el comportamiento estructural, especialmente, de puentes de mayor longitud y para soportar grandes cargas^[100].

El hierro se extendió como material de construcción de estructuras de entramado y cerchas para cubiertas, arcos y vigas de puentes coincidiendo con su expansión en el ámbito del ferrocarril, que en realidad fue el gran desencadenante de la nueva era del acero, bajo una alta demanda de nuevos puentes y edificios de grandes dimensiones, como se verá más adelante, dando lugar a la necesidad de establecer la teoría de las estructuras de entramados triangulares para entender la estática de estructuras de celosía o armaduras. Ello se debe, a que surge la necesidad de representar científicamente las creaciones estructurales y, para ello, se desarrollaron los métodos gráficos que dieron lugar a la Estática Gráfica^[100], la cual se trata posteriormente. La representación mediante dichos métodos gráficos permite, también, determinar el comportamiento estructural de otros tipos de elementos resistentes como son las construcciones de fábrica, mostrado en la figura 1.5-20, de acuerdo a la temática tratada en el presente epígrafe.

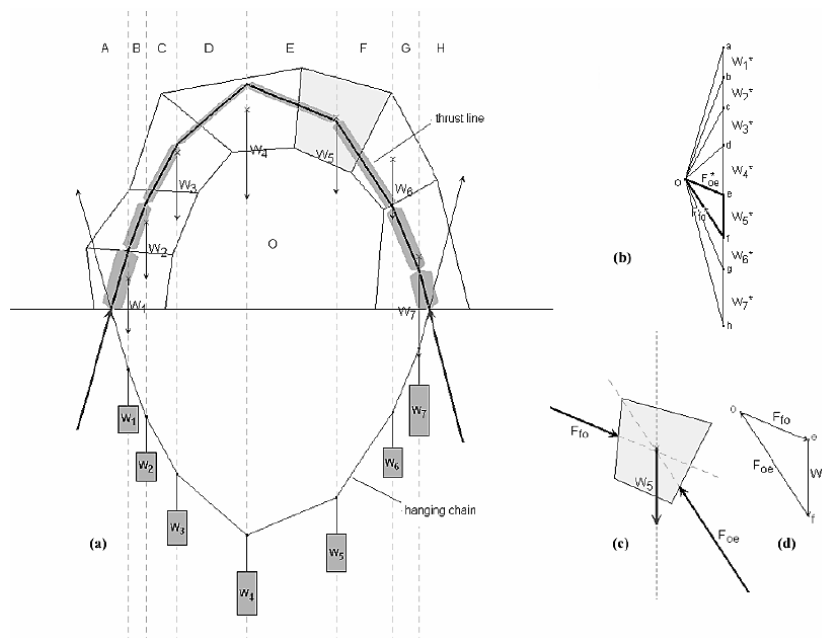


Figura 1.5-20. Estudio comportamiento estructural de un arco de fábrica utilizando la Estática Gráfica: a) Posible línea de empujes y su equivalente cadena colgante, b) Sistema de fuerzas en equilibrio, c) y d) Equilibrio de una de la dovelas. (Imagen tomada de [Block et al. 2006, 17]).

[99] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 85.

[100] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 56 y 57.

1.6 Teoría de las estructuras de entramados triangulares

En cuanto a la evolución y al avance de las vigas de celosía y las estructuras de entramados triangulares se refiere, su origen se remonta a la antigüedad, cuando dicha tipología se utilizaba para realizar puentes y cubiertas, construcciones que se ejecutaban de madera. En concreto, el primer registro de su uso, y del cual se tiene constancia, data de la época del Antiguo Egipto período en la cual se construyó el templo egipcio de Karnak en Luxor (construido entre los siglos III y I a.C.) y, posteriormente, fueron los griegos quienes para construir las cubiertas de algunas casas utilizaban cerchas de madera. De igual forma, las vigas de celosía también fueron utilizadas por los romanos para construir, principalmente puentes y cubiertas, como prueba el famoso puente sobre el río Danubio que se construyó bajo las órdenes del Emperador Trajano en el siglo I d.C. ^{[1][2]}. No obstante, los primeros puentes y acueductos se construían con arcos semicirculares de piedra, de acuerdo a la construcción tradicional, especialmente a cargo de los romanos que construyeron varios en Roma y posteriormente en otras ciudades de Europa durante la Edad Media, (a cargo de otras civilizaciones), en base a los conocimientos descritos en los primeros documentos conocidos acerca de los tipos estructurales y materiales de la construcción, obra de **Marco Vitruvio** (siglo I d.C.), de acuerdo a los fundamentos de la Estática inicialmente desarrollados por los griegos ^[3].

A lo largo de la historia de la arquitectura y de la ingeniería estructural, la viga de celosía ha tenido varias aplicaciones y registros, especialmente en el Renacimiento con el interés de los arquitectos italianos por las cerchas de madera. Un renacentista relevante fue el arquitecto italiano **Andrea Palladio** (1508-1580), que en el año 1570 publicó *Quattro Libri dell' Architettura*, con instrucciones para la construcción de puentes de celosía realizados con madera. Palladio utilizó las celosías trianguladas de madera para realizar el primer trabajo de un importante puente, y que permitió promocionar el uso de estas estructuras en ciertas obras civiles de gran envergadura. El puente ubicado entre Trento y Bassano, cubría una luz de 30,5m (100 ft) ^{[2][3]}, mostrado en la figura 1.6-1a.

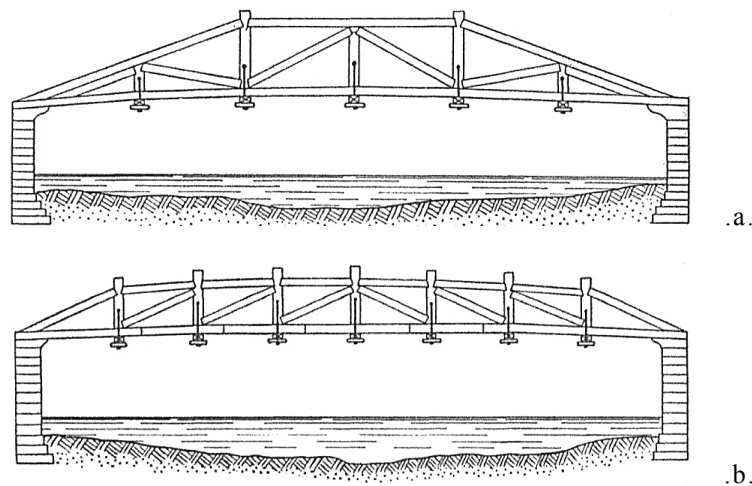


Figura 1.6-1. Construcciones en celosía de madera de Palladio: a) Puente entre Trento y Bassano, b) Celosía de madera para puente con diagonales. (Imágenes tomadas de [Timoshenko 1953, 1983, 182] y [Palladio 1570, libro 3, c. VIII] respectivamente).

[1] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 56.

[2] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 181 y 182.

[3] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 2.

Otros diseños de puentes se muestran en la figura 1.6-2, en los cuales Palladio centró sus “tres principios básicos en el diseño de puentes: comodidad, apariencia y resistencia”, como describe Xanthakos ^[4].

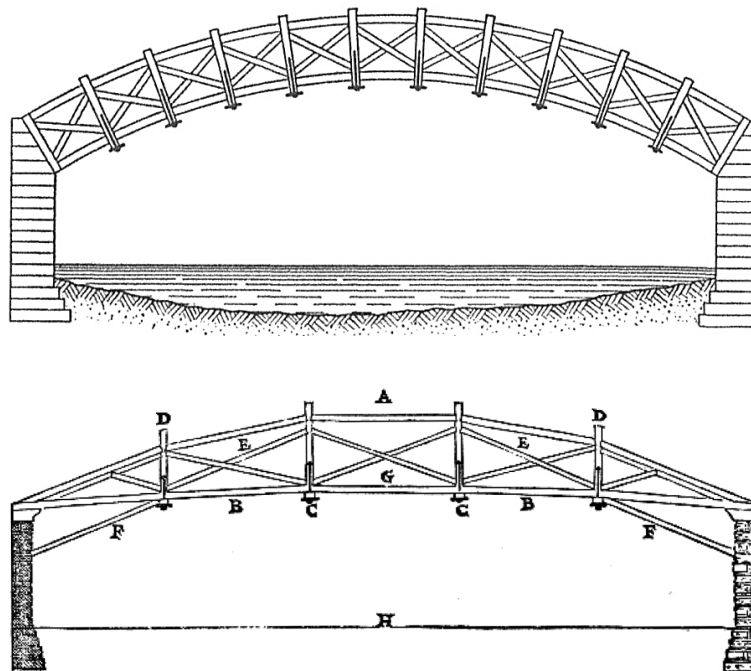


Figura 1.6-2. Puente de madera en arco y puente de celosía con diagonales, propuestos por Palladio en 1570. (Imágenes tomadas de [Timoshenko 1953, 1983, 183] y [Palladio 1570, libro 3, c. VIII] respectivamente).

Durante el siglo XVIII aparecieron las primeras vigas trianguladas *King* y *Queen* de madera, utilizadas en arquitectura y en puentes, cuya denominación dependía en función de si disponían de uno o dos postes centrales sometidos a esfuerzos de compresión para apoyar en la parte inferior una viga, como se aprecia en la figura 1.6-3. Estas geometrías *King* y *Queen* invertidas, se convierten en la viga Fink o subtensada, a mediados del siglo XIX, de uno y dos montantes simples, respectivamente, propiciado por el uso del hierro, como material de construcción ^[5].

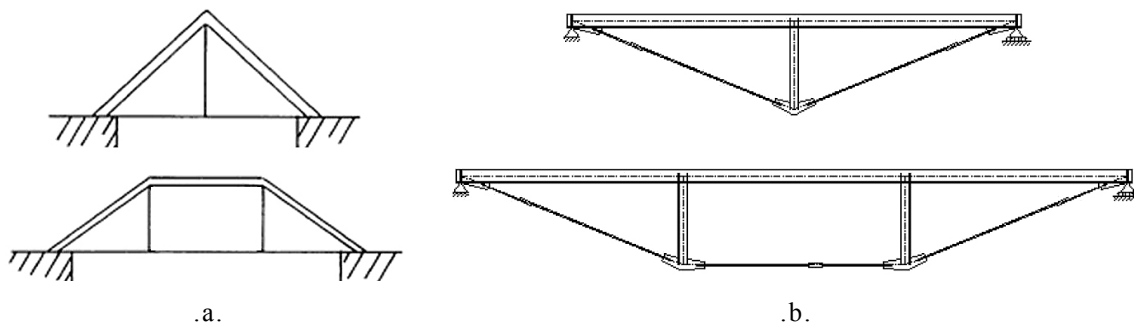


Figura 1.6-3. a) Viga *King* y viga *Queen*, b) Vigas Fink de montantes simples, conocidas como viga *King* invertida y viga *Queen* invertida. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 2004/b, 4] y [Costales Calvo 2012, 149] respectivamente).

[4] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 2.

[5] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 4.

De esta forma, los puentes construidos a partir de armaduras de madera fueron reemplazando las construcciones de piedra ante la necesidad de cubrir mayores luces y realizar estructuras más ligeras. Sin duda, el gran impulso de esta tipología estructural, se produce desde el ámbito de la ingeniería de los puentes para dar respuesta a las necesidades de la industria del ferrocarril, que requerían de grandes estructuras para salvar las largas distancias que suponían los valles y los ríos ^[6].

Durante las décadas posteriores (siglo XVIII), se construyeron varios puentes de madera en Europa Occidental, con puentes de hasta 61 m (200 ft) de luz, especialmente a principios de la década de 1750 a 1760. Un ejemplo de ello, son los puentes de madera realizados y desarrollados con armaduras en Suiza, durante dicho siglo, a cargo de la saga de los Grubenmanns ^{[7][8]}. En la figura 1.6-4, se muestra uno de los puentes más famosos realizados por **Hans Ulrich Grubenmann** (1709-1783). En concreto, es el puente de dos vanos de 52,2 y 58,8 m (171 y 193 ft) de longitud, respectivamente, construido en 1757 sobre el río Rin en la ciudad suiza de Schaffhausen. En 1778, Grubenmann, con la ayuda de su hermano, construyó sobre el río Limago, cerca de la comuna suiza de Wettingen, el puente de madera de mayor longitud realizado hasta el momento, con una longitud de 119 m (390 ft) de luz ^[9].

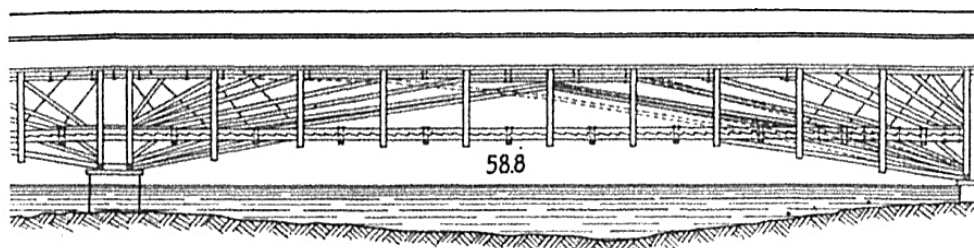


Figura 1.6-4. Puente de dos vanos sobre el río Rin en Schaffhausen de Grubenmann en 1757. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 183]).

Los posteriores puentes de madera con la misma tipología estructural aunque de menores longitudes se realizaron en Suiza y Alemania dando paso al desarrollo de puentes en arco. Esta geometría permitía aumentar la rigidez de los puentes, destacando por su relevancia los realizados por **Émiland-Marie Gauthey** (1732-1806) en Francia y por **Carl Friedrich Wiebeking** (1762-1842) en Bavaria ^[9].

A pesar de todos los avances previos expuestos, fue en el siglo XIX cuando se produjo, especialmente en Estados Unidos, Inglaterra y Rusia, un progreso significativo en puentes de madera con estructuras de entramado entre los años 1820 y 1830. La necesidad para cubrir mayores luces con un coste menor y de rápida ejecución, propició que la construcción de puentes de madera se extendiera de forma amplia, utilizando los distintos sistemas de armaduras o vigas en celosía, similares a las diseñadas y utilizadas por Palladio, a cargo de ingenieros como Theodore Burr (1771-1824), Stephen Harriman Long (1784-1864), Ithiel Town (1784-1844) o William Howe (1803-1852) ^{[7][8][9]}, entre otros.

Uno de los pioneros fue **Theodore Burr** (1771-1824), quien se caracterizó por su ingenio para construir, entre los años 1800 y 1820, distintos puentes para el ferrocarril ^[6], tal y como se desprende de las imágenes de la figura 1.6-5.

[6] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 2.

[7] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 70.

[8] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 2.

[9] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 182-184.

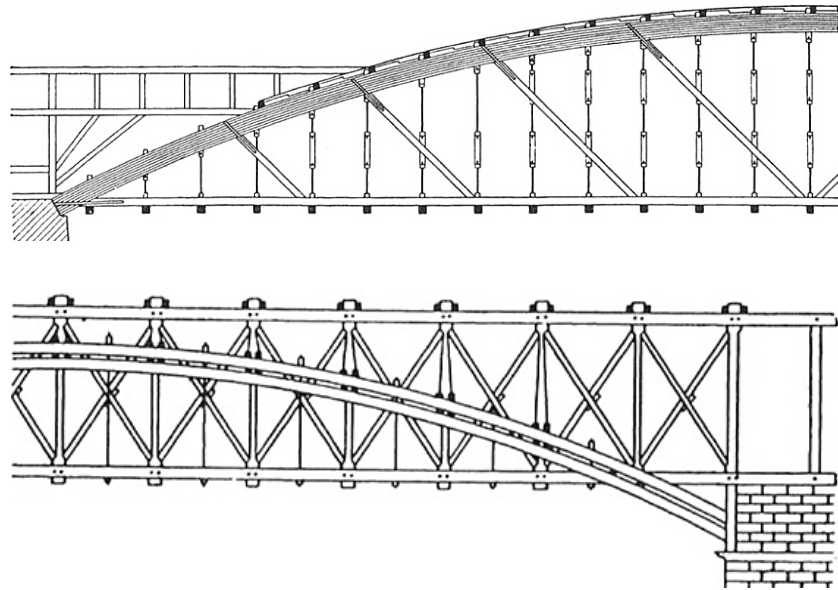


Figura 1.6-5. Puentes para el ferrocarril diseñados por Burr. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 71]).

En este contexto, destacar que en 1839 **Stephen Harriman Long** (1784-1864) desarrolló una de las vigas de celosía más excepcionales de madera, en base a la geometría de viga “en X”, junto con otro puente del mismo periodo, *The Cascade Bridge* de unos 91,4 m de longitud (300 ft) ^[10]. Long dio a conocer su viga de celosía “en X”, la cual se muestra en la figura 1.6-6, alrededor de 1835, popularmente conocida como viga “en cruz San Andrés”, con un cordón superior y otro inferior unidos por un sistema de barras en diagonal y en vertical, introduciendo así el concepto en lengua inglesa de «*framework*», (“estructura de entramado”) ^[11]. Long se inspiró en la obra de Palladio pero, además, evidentemente proporcionó un método válido para dimensionar las distintas barras de las armaduras de los puentes de varios vanos que diseñaba, en base al cálculo de las tensiones de las barras obteniendo, así, unas proporciones razonables de éstas acorde a las solicitaciones ^{[10][12][13]}.

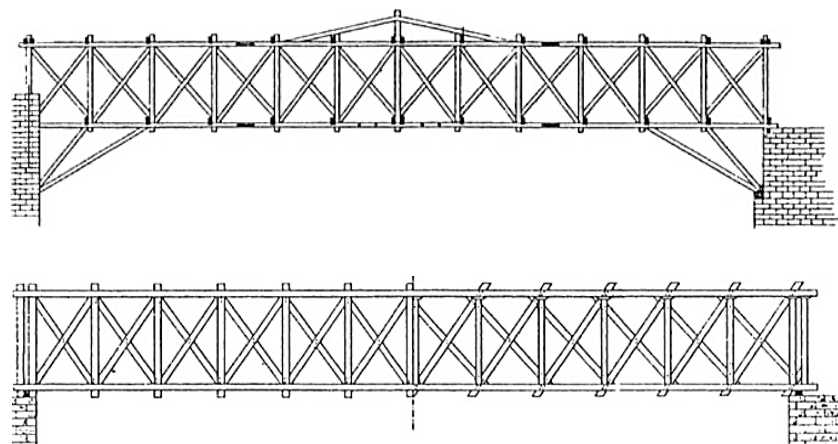


Figura 1.6-6. Puente con viga de celosía “en X”, diseñado por Long. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2002, 48]).

[10] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, pp. 2 y 3.

[11] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 71.

[12] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 20.

[13] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 191.

Ithiel Town (1784-1844) desarrolló y patentó, en 1820, el puente de celosía con doble pared de entramado que fue utilizado con frecuencia, el cual se muestra en la figura 1.6-7a. Unos años más tarde, en concreto en 1840, **William Howe** (1803-1852), introdujo y patentó el sistema de viga de celosía mostrado en la figura 1.6-7b, convirtiéndose en el estándar para el diseño de muchos de los puentes ferroviarios realizados en la época ^{[14][15][16][17]}.

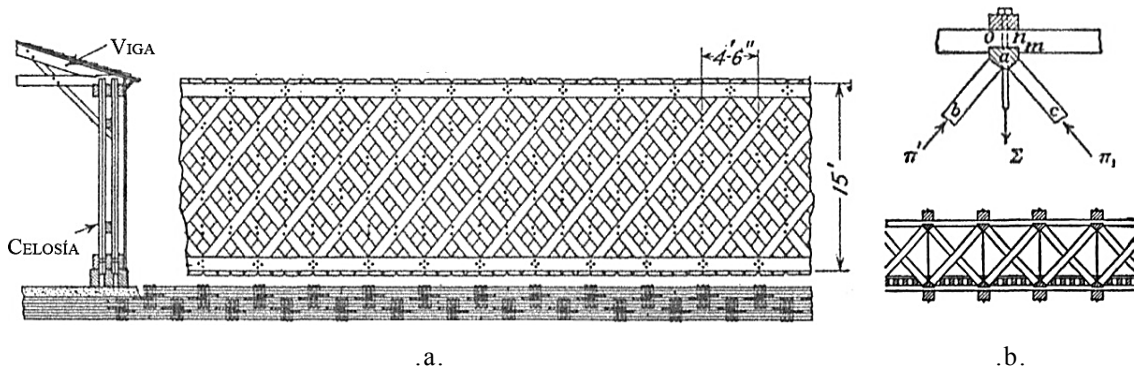


Figura 1.6-7. a) Puente con viga de celosía diseñado por Town, b) Celosía y detalle de la unión de Howe. (Imágenes tomadas de [Timoshenko 1953, 1983, 184]).

Uno de los más significativos desarrollos que se experimentó en el ámbito de las vigas de celosía de madera fue la armadura tipo arco, con o sin tirantes, para la construcción de puentes ferroviarios. En 1951 ^[18], **Karl Culmann** (1821-1881) proporcionó una relación detallada de las distintas tipologías estructurales utilizadas para la construcción de los puentes estadounidenses, además de aportar nuevas ideas y conceptos para su diseño, los cuales podían ser construidos con total seguridad, gracias a la fiabilidad de los métodos gráficos utilizados para determinar los esfuerzos de las barras de las estructuras de entramado o armaduras, incluidas las vigas de celosía caracterizadas por ser estáticamente redundantes ^{[16][19]}.

De acuerdo a lo anteriormente expuesto, las grandes celosías y cerchas modernas tienen su origen en las construcciones de puentes, principalmente en Estados Unidos y en Inglaterra, donde era conveniente diseñar armaduras que permitieran optimizar los recorridos de las amplias líneas ferroviarias que se trazaban a través de los ríos y los valles. Como se ha referido, las vigas de celosía inicialmente eran de madera, pero fueron remplazadas de forma paulatina por las de hierro, las cuales fueron introducidas durante el periodo de transición, en el ámbito de la construcción, de la madera al hierro para la concepción de estructuras de gran envergadura, eso sí, utilizando las mismas disposiciones geométricas y triangulaciones que las vigas de celosía de madera ^{[16][17]}.

De esta forma, el metal se convirtió en la alternativa a las estructuras conformadas con vigas macizas utilizadas en el ámbito de la construcción, con una reducción considerable del peso propio de las estructuras, suponiendo un ahorro significativo de material, y del coste, a la vez que con mayor seguridad. El uso del hierro se

[14] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 70.

[15] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 184.

[16] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, pp. 1 y 2.

[17] Serrano López, R. (2011). *Arquitectura e Ingeniería del Hierro en las Provincias de Burgos y Palencia (1830-1940)*, p. 47.

[18] Culmann, K. (1851). *A description of the latest advances in bridge, railway and boat construction in England and U.S.A.*

[19] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 169.

extendió, además de su utilización para la construcción de puentes, para cubrir distintas tipologías edificatorias como son naves diáfanas, mercados urbanos y estaciones mediante la construcción de cerchas, arcos y vigas, coincidiendo con su expansión en el ámbito del ferrocarril, que en realidad fue el gran desencadenante y propulsor de la nueva era del hierro, bajo una alta demanda de nuevos puentes así como de edificios de mayor altura y prestaciones, como describe Charlton ^[20].

La transición de la madera al hierro como material de construcción para puentes, se considera que surgió, alrededor de 1840, cuando se planteó la primera gran viga de celosía de hierro para puentes como alternativa constructivo-estructural a las pesadas vigas macizas, obteniendo así, estructuras de menor coste económico, fruto de la reducción del peso propio de dichas estructuras. Aunque el primer puente en el cual se utilizó hierro para su construcción en 1734 fue el puente colgante que permitía cruzar el río Oder en Prusia, y el año 1779 se ejecutó el puente de *Coalbrookdale* para cruzar sobre el río Severn en el Condado de Shropshire, en Escocia, totalmente construido con hierro fundido por **Abraham Darby III** (1750-1789). El puente fue iniciativa y diseño del arquitecto inglés **Thomas Farnolls Pritchard** (1723-1777), siendo considerado el primer puente metálico de la historia ^{[21][22][23][24]}.

No obstante, la utilización del hierro como material para la construcción de puentes no se produjo de forma definitiva hasta alrededor del año 1840 en Estados Unidos, a cargo de la ingeniería americana Trumbull, de la mano de uno de los pioneros en este ámbito, como fue el ingeniero civil **Squire Whipple** (1804-1888), siendo conocido como el padre de la construcción de puentes de hierro en Estados Unidos. Una de estas primeras construcciones metálicas americanas, se muestra en la figura 1.6-8, obra de Whipple que construyó el primer puente de hierro con armadura en arco, en el Canal de Erie en Utica, el 1840, y que patentó en 1841, “**inteniendo que cada parte de la estructura trabaje de acuerdo a su forma: el arco a compresión (hierro de fundición) y el tirante a tracción (de hierro forjado, como las diagonales)**” ^{[24][25]}.

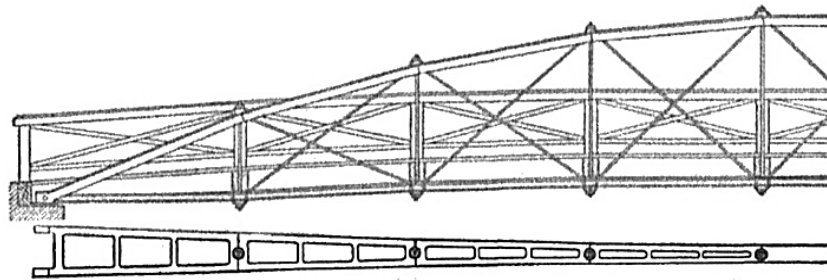


Figura 1.6-8. Puente con viga de celosía en arco diseñado por Whipple en 1840. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 184]).

Posteriormente, las primeras construcciones de puentes metálicos surgieron en países como Inglaterra en 1845 (con armaduras geoméricamente similares a la celosía de madera de Town), Francia en 1848, Rusia en 1857, y Alemania en 1853. Whipple también construyó otros puentes, como el que diseñó y llevó a cabo para

^[20] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 56 y 57.

^[21] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 42.

^[22] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 64.

^[23] Manterola Armisen, J. (1984). *Evolución de los puentes en la historia reciente*, p. 7.

^[24] Serrano López, R. (2011). *Arquitectura e Ingeniería del Hierro en las Provincias de Burgos y Palencia (1830-1940)*, pp. 44 y 50.

^[25] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 184.

el ferrocarril Rensselaer-Saratoga, entre los años 1852 y 1853. Este puente de Whipple, mostrado en la figura 1.6-9, destaca por la utilización de hierro fundido para la ejecución de los elementos superiores, mientras que en las barras inferiores, cables y diagonales de las armaduras o estructuras de entramado, se utilizaba hierro forjado para diseños estructurales similares a las geometrías de las vigas de celosías de madera de Howe, pero en este caso construidas con hierro ^{[26][27]}.

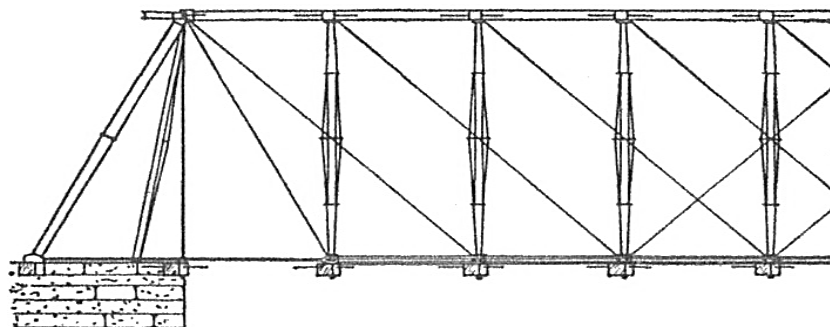


Figura 1.6-9. Puente diseñado por Whipple para el ferrocarril de Rensselaer-Saratoga. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 185]).

Como indican Timoshenko ^[26] y Xanthakos ^[27] las décadas posteriores, durante el desarrollo del siglo XIX, se centró el ímpetu y el esfuerzo de los ingenieros más influyentes de la época en el análisis de celosías para la construcción de puentes, como es el caso del mencionado Whipple, que además escribió acerca de esta temática ^[28], considerándose su obra la primera referencia bibliográfica que contenía información útil acerca del análisis de celosías, a pesar de que el arquitecto e ingeniero **Thomas Pope** (-) había publicado el primer libro sobre puentes en 1811 ^[29].

El gran avance de Whipple acerca de las vigas de celosía en base a sistemas estáticamente determinados que obtenía al “considerar únicamente en el análisis las barras de relleno sometidas a esfuerzos de compresión, lo que le permitía iniciar el cálculo por uno de los apoyos determinando las fuerzas de cada una de las barras mediante el paralelogramo de fuerzas de los nudos consecutivos del sistema dibujando, así, un polígono de fuerzas en cada nudo en su diagrama de líneas de la armadura” ^[26]. A su vez, Whipple fue el primero en considerar, “no sólo las acciones uniformemente distribuidas sino que también consideró las cargas móviles, obteniendo de esta forma la posición más desfavorable para cada una de las barras de la estructura, aspecto que le permitió definir de forma clara métodos válidos, tanto analíticos como gráficos”, en acepción a Timoshenko ^[26].

En 1847, el ingeniero francés **Barthélemy Camille Polonceau** (1813-1859) inventó la viga que lleva su nombre, compuesta por dos vigas Fink (la cual fue descubierta posteriormente), con una determinada inclinación a dos aguas, unidas por un tensor inferior horizontal. La viga subtesada Polonceau se caracteriza por su ligereza, al disponer tirantes en las barras traccionadas (cordón inferior y diagonales), adaptando así las características de las barras de acuerdo a las esfuerzos solicitantes ^{[30][31]}.

^[26] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 184-186.

^[27] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 3.

^[28] Whipple, S. (1847). *An essay on bridge building*.

^[29] Pope, T. (1811). *A Treatise on Bridge Architecture: In which the Superior Advantages of the Flying Pendant Lever Bridge are Fully Proved*.

^[30] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, pp. 31 y 32.

^[31] Costales Calvo, I. (2012). *El pretensado en las estructuras de acero*, p. 28.

En esta misma línea, en los años 50 del siglo XIX, destacan los ejemplos de cierta relevancia en el ámbito de las celosías para puentes del ferrocarril de Baltimore y Ohio, a cargo del ingeniero norteamericano **Wendel Bollman** (1814-1884) y del ingeniero alemán **Albert Fink** (1827-1897), quien también desarrolló su actividad profesional en Estados Unidos. En 1850 se utilizó por primera vez la viga proyectada por Bollman, la cual fue patentada en 1851. La viga Bollman se caracterizaba por disponer, como ya hizo Whipple, hierro fundido en las barras sometidas a esfuerzo de compresión, mientras que los elementos de tracción eran de hierro forjado. La solución híbrida constituida por las diagonales múltiples y las “cruces de San Andrés” en los distintos recuadros, para sujetar la base de los montantes, conformaban una geometría de un formalismo destacable. En realidad, la viga Bollman se compone, como se aprecia en la figura 1.6-10, de una sucesión de vigas Fink simples no simétricas ^{[32][33][34]}.

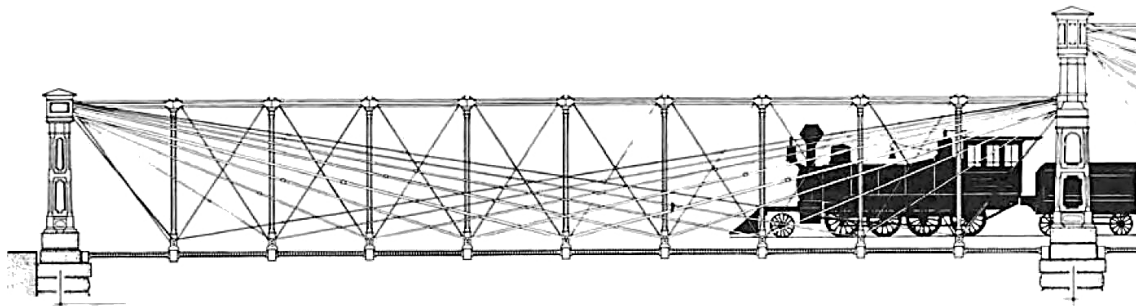


Figura 1.6-10. Alzado puente en celosía tipo Bollman sobre el río Potomac en Harpers Ferry. (Imagen tomada de [Serna García-Conde 2006, 72]).

En el caso de la viga subtesada Fink, se pretende el mismo concepto estructural, mediante la utilización de tirantes hasta el punto que se elimina el cordón inferior, como se muestra en la figura 1.6-11, mientras que el cordón superior se apoya en sus extremos. La carga que soportan los montantes se transmite mediante las diagonales o tirantes a los soportes. Esta tipo de celosía fue patentada en 1854 ^[34].

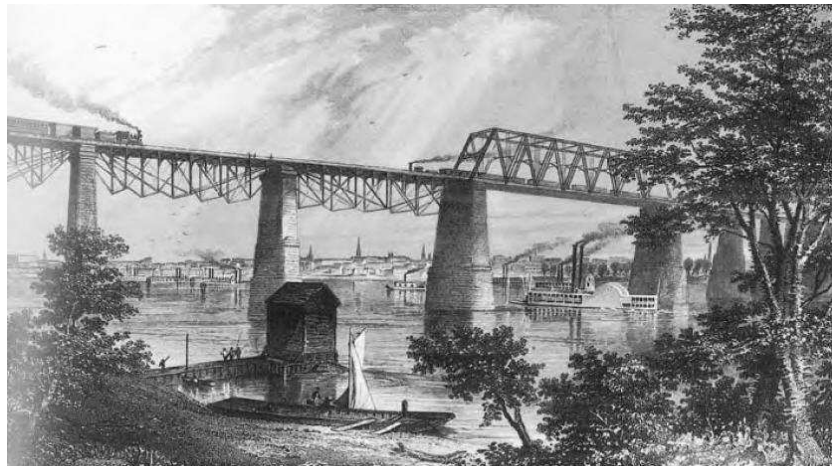


Figura 1.6-11. Puente en celosía tipo Fink de 55 metros sobre el río Ohio (1870). (Imagen tomada de [Serna García-Conde 2006, 73]).

[32] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 42.

[33] Costales Calvo, I. (2012). *El pretensado en las estructuras de acero*, p. 28.

[34] Serna García-Conde, J. (2006). *Los puentes del tren*, p. 72.

En los años posteriores, otras tipologías de vigas de celosía fueron proyectadas, pero sin un papel tan relevante como las celosías previamente descritas. Mencionar las vigas de los ingenieros **Herman Haupt** (1817-1905) y **Jacob Hays Linville** (1825-1906).

El ingeniero ferroviario **Dmitri J. Jourawski** (1821-1891), el año 1844, se interesó por las características geométricas de la viga Howe, como resultado de analizar las celosías considerando las barras de los cordones y las diagonales únicamente comprimidas, como se muestra en la figura 1.6-12, para obtener un sistema de barras estáticamente determinado que se pudiera analizar con los métodos de la época. Esta metodología de análisis le sirvió para diseñar y construir el puente de Werebia, de acuerdo a la tipología o sistema Howe, a la vez que desarrolló un método para el cálculo de los esfuerzos de las barras de las armaduras, para encontrar el estado de cargas más desfavorable para cada una de las barras que conforman la estructura del puente y, en consecuencia, calcular los esfuerzos máximos que le permitían determinar de forma adecuada las dimensiones de la sección transversal resistente de dichas barra, como expone Timoshenko ^[35].

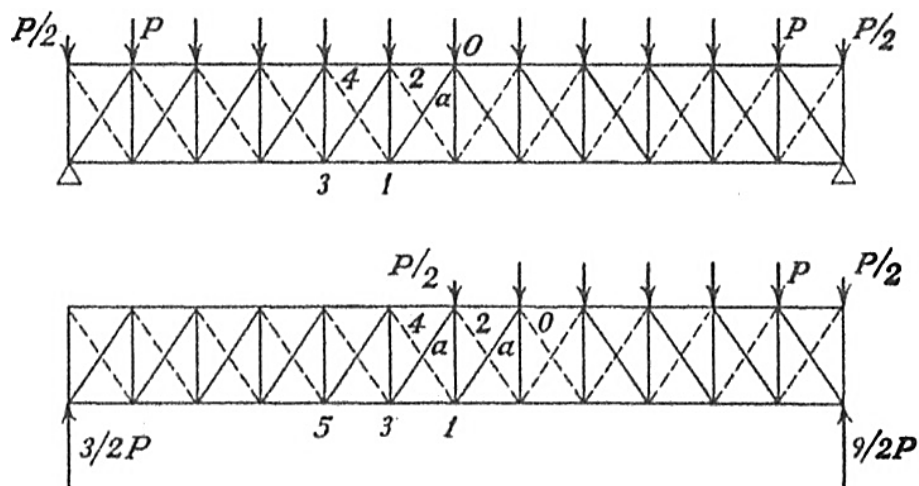


Figura 1.6-12. Análisis de las celosías según Jourawski, no considerando las barras que se muestran con líneas discontinuas, para los casos de cargas simétricas y cargas no simétricas respecto al punto central de las celosías. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 187]).

En esta misma línea de simplificación de las estructuras más complejas, a medida que estas fueron evolucionando Jourawski propuso principios y fundamentos para facilitar el análisis de sistemas de mayor complejidad, como el que se muestra en la figura 1.6-13a, para la cual propone calcular los esfuerzos de las barras de estructura de entramado, en base al *método de los nudos*, por superposición de las fuerzas que se pueden obtener, con mayor facilidad, de acuerdo a las celosías simples, que en este caso se indican en las figuras 1.6-13bc. Todas estas aportaciones que llevaba realizando Jourawski, desde 1844, acerca de su método para analizar y calcular los esfuerzos de vigas de celosías para puentes de ferrocarril tipo Howe, las publicó en el libro *Zhurnal Glavnago Upravleniya Putej Soobshcheniya i Publichnih Rabot*, el año 1850 ^[36], como refieren Serrano ^[37] y Timoshenko ^[35].

^[35] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 186, 188 y 189.

^[36] Jourawski, D.J. (1850).

^[37] Serrano López, R. (2011). *Arquitectura e Ingeniería del Hierro en las Provincias de Burgos y Palencia (1830-1940)*, p. 53.

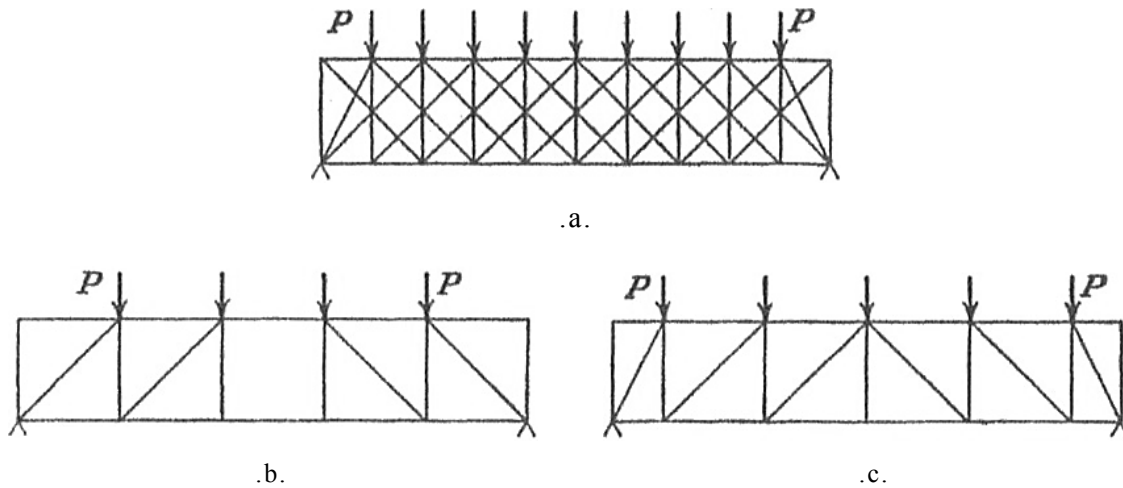


Figura 1.6-13. Análisis de las celosías según Jourawski: a) Sistema estructural inicial, b) y c) Celosías simples equivalentes a la estructura inicial de mayor complejidad. (Imágenes tomadas de [Timoshenko 1953, 1983, 188]).

A partir de aquí, fueron varios los autores que se interesaron por el estudio y la teorización de los puentes de celosía. En 1846, el ingeniero británico **James Warren** (-) introdujo el sistema o la armadura triangulada Warren, que patentaría en 1848 junto con **Willoughby Monzoni** (1806-?), para el diseño de vigas y de puentes, y el método para analizarla surgió alrededor de 1850^{[38][39][40][41]}. **William Fairbairn** (1789-1874), en su libro *On the application of cast and wrought iron to building purposes*^[42], “describe las fórmulas correctas para calcular los esfuerzos de las barras de las estructuras de entramado para cargas uniformemente distribuidas, pero también, para cargas móviles”^[38], en base al análisis de celosías que Fairbairn obtuvo en 1850. En 1857, **William Humber** (1821-1881), obtuvo resultados experimentales de gran relevancia para el cálculo de los esfuerzos de las barras de la viga Warren que permitieron dar a conocer el método de análisis de dicha triangulación^[43].

El diseño y el análisis de celosías siguió de la mano de autores tan influyentes como Johann Wilhelm Schwedler (1823-1894), Culmann, August Ritter (1826-1908) y Hermann Zimmermann (1845-1935), contribuyendo extensiblemente al análisis de estructuras de entramado, utilizando álgebra y aritmética^{[44][45]}.

Johann Wilhelm Schwedler (1823-1894) en su obra publicada en 1851^[46], utilizó en sus análisis los conocimientos acerca del momento flector y del esfuerzo cortante, estableciendo la relación $V = dM/dx$, y que posteriormente utilizó para el análisis de celosías estableciendo, a su vez, que el momento flector alcanza su valor máximo en la posición de la barra en la cual la fuerza de cizallamiento cambia de signo. De acuerdo a la figura 1.6-14, en la cual se muestra una celosía de nudos

[38] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 186.

[39] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 10.

[40] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 73.

[41] Serrano López, R. (2011). *Arquitectura e Ingeniería del Hierro en las Provincias de Burgos y Palencia (1830-1940)*, p. 51.

[42] Fairbairn, W. (1857).

[43] Humber, W. (1857). *A practical treatise on cast and wrought iron bridges and girders, as applied to railway structures, and to buildings generally, with numerous examples, drawn to a large scale, selected from the public works of the most eminent engineers*.

[44] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 58.

[45] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 3.

[46] Schwedler, J.W. (1851). *Theorie der Bruckenbalkensysteme*.

articulados, Schwedler determina los esfuerzos axiales de las barras que corta, sección ab , en base a las tres ecuaciones de equilibrio de la Estática ^[47].

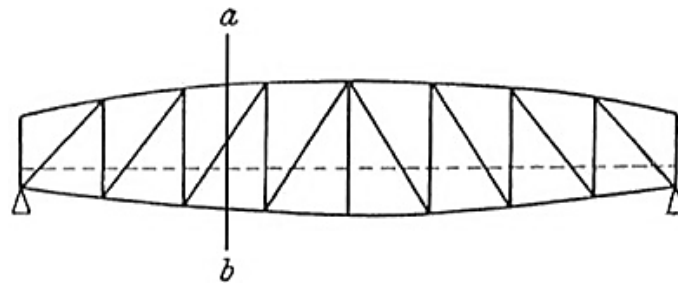


Figura 1.6-14. Viga de celosía de nudos articulados de Schwedler. (Notación adaptada de [Kurrer 2008, 585]).

August Ritter (1826-1908) simplificó el cálculo de las fuerzas de las barras intersectadas por la sección transversal ab del esquema propuesto anteriormente por Schwedler de acuerdo a la referida figura 1.6-14, “utilizando las ecuaciones de equilibrio de momentos sobre los puntos de intersección de tres barras intersectadas, siendo necesario sólo una ecuación con una incógnita en cada paso, obteniendo fórmulas muy básicas”, como describe Timoshenko ^[47]. Los métodos analíticos fueron utilizados por Schwedler y Ritter para el análisis de celosías, principalmente para estructuras de entramado para puentes. Posteriormente se introdujeron, para el análisis de celosías, los métodos gráficos que fueron propuestos por **Culmann** y **James Clerk Maxwell** (1831-1879) ^[47], entre otros, los cuales requerirán de un tratamiento particular en su momento.

Cuando hubo la necesidad de expresar las creaciones estructurales en el ámbito tecno-científico surgió la Estática Gráfica como se expone a continuación. En acepción a Charlton ^[48] “Culmann reconoce claramente la necesidad urgente de desarrollar los métodos de Navier para su aplicación en el diseño de puentes de ferrocarril, y realiza su informe acerca de los métodos de cálculo de los esfuerzos en las nuevas geometrías para puentes, enfatizando que éstos pueden ser aplicados con total seguridad”. El análisis gráfico fue aceptado como un avance riguroso en base a estos métodos. La presentación gráfica fue del agrado de los ingenieros, especialmente, en virtud de la observación de los errores y defectos de diseño ^[48], tal y como lo menciona Mohr en sus artículos de teoría para el análisis de estructuras de entramados de madera y hierro, mediante métodos gráficos ^[49].

Atendiendo a estos criterios en el siguiente apartado se expone la Estática Gráfica, que Culmann desarrolló aportando métodos gráficos para el análisis de estructuras de entramado para puentes ferroviarios. Para ello, Culmann se interesó especialmente por el trabajo realizado por Long, al considerarlo uno de los ingenieros más influyentes de Norteamérica en aquella época en el ámbito de puentes de celosía, en base a su teorización sobre el análisis, para determinar las dimensiones más adecuadas de las barras de sus construcciones ^[47].

En cuanto a las otras referencias que Culmann pudo observar, como fueron el sistema estructural del ingeniero Howe y los puentes de celosía de Town, Culmann no los aceptó con tanto entusiasmo, más bien todo lo contrario, siendo muy crítico con ellos, al considerar que las aportaciones de ambos ingenieros no tenían mayor rele-

^[47] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 189 y 190-192.

^[48] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 58 y 169.

^[49] Mohr, O. (1860, 1862, 1868). *Beiträge zur Theorie der Holz-und Eisenkonstruktionen*.

vancia en la Teoría de las Estructuras, “definiéndolas como simples mejoras prácticas del método de construcción de puentes utilizado por Long. La crítica al respecto fue tal, que Culmann no recomendó dichas aportaciones para ser utilizadas en la construcción de puentes en Alemania. En este sentido, también fue muy crítico con los puentes de Burr, al considerar que éstos se desarrollaron a partir del puente europeo tipo arco que fue introducido por Gauthey y Wiebeking”, de acuerdo a Timoshenko ^[50].

En 1866, Culmann expuso los principios para el diseño y análisis de las armaduras de puentes en voladizo, materializándose un año más tarde con el ejemplar puente en voladizo de 129,5m (425 ft) de longitud sobre el río principal de Hassfurt (Alemania), mientras que en Estado Unidos el primer puente en voladizo se construyó en 1875 para atravesar el río de Kentucky. El puente más impresionante en voladizo, para el ferrocarril del siglo XIX, fue el puente *First of Forth*, construido entre los años 1883 y 1890, con una longitud total de 521,5m en cada arco (1711 ft) ^[51].

De lo anteriormente expuesto, se infiere que hubo **un cambio en la forma de proyectar y calcular estructuras metálicas**, ante la necesidad de que fueran mucho más seguras y económicas, siendo necesario para ello realizar **estructuras de entramado más eficientes y óptimas desde el punto de vista de la forma**.

En este sentido es oportuno mencionar al arquitecto **Joan Torras Guardiola** (1827-1910) por su trabajo de gran relevancia en el ámbito de las estructuras de entramado para proyectos de edificación, siendo un pionero al proyectar y diseñar las estructuras desde la forma con el fin de que fueran más eficientes y “equilibradas”.

Torras Guardiola fue un arquitecto catalán, maestro de arquitectos como Antoni Gaudí, Puig Cadafalch, Grases, Amargós, Sagnier, Félix Cardellach, Rafael Guastavino, Rubió Bellver, F. de Paula Nebot, F. Rogent, J. Goday, M. Raspall, P. Domènech Roura, J. M^a Jujol, G. Martorell, B. Bassegoda ^{[52][53]}, entre otros. Como expone Feliu ^[53], centró su obra en estructuras metálicas, así como en cálculos de resistencia, para proyectos arquitectónicos de gran relevancia a finales del siglo XIX. Especialista en cubiertas y estructuras metálicas para mercados, entre los que cabe indicar los de Lérida y Tortosa, hasta el punto de ser considerado y conocido por su relevancia en el ámbito tecno-científico de las estructuras como el Eiffel catalán. Fue tal su envergadura que, para el proyecto del puente de San Agustín del río Onyar en Girona (1876-1877), ganó el concurso en presentar al mejor proyecto y el presupuesto más ajustado, fruto de un diseño más óptimo y eficiente, por delante del ingeniero francés **Alexandre Gustave Eiffel** (1832-1923) ^[54].

La relevancia en la obra de Torras Guardiola reside, entre otros motivos, en ser un técnico pionero en el diseño de estructuras arquitectónicas caracterizadas por su eficiencia y, en definitiva, por abordar el proyecto desde la optimización de la estructura en base a su geometría. Ejemplo de ello, son el descubrimiento de la estructura metálica de cerchas parabólicas para cubiertas como resultado del sistema estructural optimizado desde la forma, a la cual se refería como «ala de mosca», la cual se ha mostrado al inicio del capítulo. Este concepto de «vigas equilibradas», base de la concepción preliminar citada al inicio de capítulo según Torras Guardiola, lo pronunció en el discurso que realizó en el Congreso de Ingeniería de Barce-

^[50] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 191 y 192.

^[51] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 3.

^[52] Brufau Niubó, R. (2011/b). *Homenatge a Joan Torras i Guardiola*, p. 57.

^[53] Feliu Torras, A. (2011). *Joan Torras i Guardiola. Biografia (1827-1910)*, pp. 58 y 61.

^[54] Montañéz, J.Á. (2011). *Joan Torras, el Eiffel catalán*.

lona, celebrado en 1888, en el cual también enunció el siguiente concepto que subraya Robert Brufau Niubó:

“[...] Cada sección guardará relación con las solicitaciones que reciba. A la viga, la forma de la cual se haya calculado de esta manera, se le llama «viga equilibrada», o de igual resistencia, ya que efectivamente, tiene la misma (resistencia) a todas las secciones, y se expone a la rotura por una sección u otra [...]”

Joan Torras Guardiola (1888), citado por [Brufau Niubó 2011/b, 56].

Sin duda una de las expresiones de estructura de entramado de mayor proyección mundial es la Torre Eiffel, una estructura con base de celosía construida para la Exposición Universal de París de 1889. Con el nombre del ingeniero jefe que dirigió su construcción, Eiffel, esta estructura de celosía de hierro forjado se convirtió en la construcción más alta durante más de cuarenta años, con una altura de 300 m (324 m incluida la antena), permaneciendo como uno de los iconos y símbolos arquitectónicos más importantes del siglo XIX. El diseño de la Torre Eiffel fue un paso revolucionario, **dado que se adaptó una tipología estructural concebida en horizontal que se empezó a aplicar como solución estructural en vertical, dando paso a una nueva forma de construir: las torres y los edificios en altura.** Este principio lo abordaremos en profundidad en los capítulos 3, 4 y 5, acerca de las estructuras espaciales en la arquitectura, en concreto en edificios en altura.

Posteriormente, la Torre Eiffel fue analizada gráficamente, por uno de los alumnos más destacados de Culmann, **Maurice Koechlin** (1856-1946), para calcular los esfuerzos internos de la emblemática torre, como punto álgido del procedimiento de la Estática Gráfica ^{[55][56][57]}, como se muestra en la figura 1.6-15, la cual se aborda a continuación.

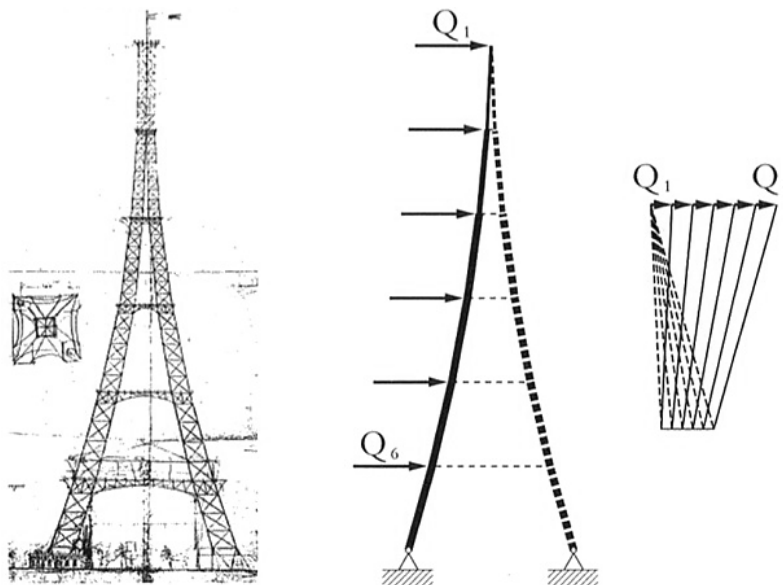


Figura 1.6-15. Pílon de 300 m para la Torre Eiffel de París propuesto por el ingeniero Koechlin en 1884 con la ayuda de Stephen Sauvestre (1847-1919). (Imagen tomada de [Muttoni 2011, 150]).

[55] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 171.

[56] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 1000.

[57] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 94.

1.7 La Estática Gráfica

La Estática Gráfica, designada también con el nombre de *Grafostática*, es un procedimiento gráfico general, que comprende una metodología sencilla atendiendo a conceptos gráficos básicos, y que tiene el objetivo fundamental de resolver problemas de equilibrio de objetos materiales de acuerdo a las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo en el espacio. Es decir, la Estática Gráfica permite calcular la resultante de un sistema de fuerzas, así como resolver problemas de la Estática hasta un cierto grado de exactitud, mediante la representación gráfica de las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un punto u objeto material, determinando, de esta forma, las reacciones y fuerzas internas.

El principio elemental de la Estática Gráfica es la relación ordenada entre el polígono funicular y el polígono de fuerzas ^{[1][2][3][4]}, como se tratará posteriormente. Camilo Doria Martí define la función y el objeto del procedimiento gráfico de la Estática Gráfica, como:

“El objeto de la Grafostática es investigar las condiciones necesarias para establecer el equilibrio de un sistema cualquiera de fuerzas por medios puramente geométricos. Como se puede comprender, la Grafostática sólo puede resolver los problemas hasta un cierto grado de exactitud. Esto no sucede con el método analítico, ya que mediante el mismo podemos obtener el grado de aproximación que deseemos.”

[Doria Martí 1983, 267].

La gran ventaja de la Estática Gráfica reside en que permite resolver distintos problemas de la Estática, conforme a la relación entre la **mecánica y la geometría**, como queda patente en la representación gráfica de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un punto material, como se muestra en la figura 1.7-1.

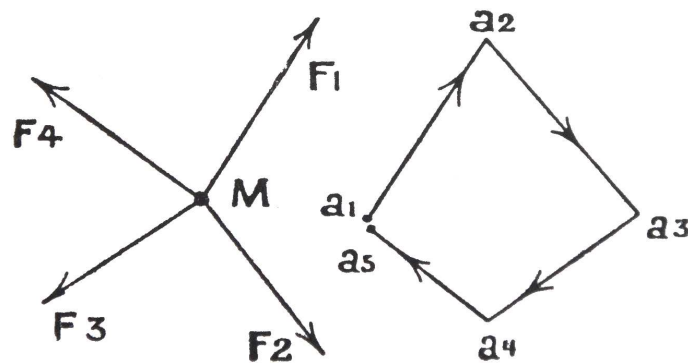


Figura 1.7-1. Polígono de fuerzas o vectorial (a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5) de acuerdo a las fuerzas actuantes sobre un punto material M . (Imagen tomada de [Bayle 1966, 6]).

Cabe destacar que, en la representación gráfica, las condiciones de equilibrio de un punto material M , “para que haya equilibrio, suponiendo que todas las fuerzas están en un mismo plano, y que además son concurrentes, es necesario y suficiente que

[1] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 267.

[2] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 998.

[3] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 202.

[4] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estática Gráfica*, p. 5.

sea nula la proyección de estas fuerzas sobre dos ejes cualesquiera, lo que implica forzosamente que lo sea el vector resultante $a_1 a_5$ (figura 1.7-1)” [5].

En base a técnicas y métodos gráficos de gran sencillez, permite resolver problemas de composición y descomposición de fuerzas y de su equilibrio, que Georges Bayle define así:

“La Estática Gráfica [...], tiene por objeto representar gráficamente las condiciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre un punto material o bien sobre cuerpos definidos. Tiene igualmente por objeto determinar la magnitud y el sentido de los esfuerzos a que están sometidos los diversos elementos de estos cuerpos, lo que permite seguidamente a la Resistencia de Materiales calcular las dimensiones que conviene darles para que puedan resistir dichos esfuerzos en las debidas condiciones de seguridad.

Constituye, pues, un auxiliar precioso de la Resistencia de Materiales, y si bien no da resultados tan exactos como los métodos algebraicos, presenta sobre éstos la ventaja de la gran sencillez. Por último, la Estática Gráfica permite resolver geométricamente ciertos problemas, como son los relativos a la determinación de centros de gravedad, momentos estáticos y momentos de inercia.”

[Bayle 1966, 5 y 6].

La Estática Gráfica aborda y resuelve con rigor, distintos problemas de la Estática como pueden ser centros de gravedad de una área, momentos estáticos, momentos de inercia, así como, resultantes de sistemas de fuerza o resolver estructuras de barras [6]. La Estática Gráfica se fundamenta en propiedades geométricas que permiten representar gráficamente las condiciones de equilibrio de dichas fuerzas que actúan sobre un plano único, por lo tanto, como indican Serrallonga y Brufau [6], “determinar la resultante de dichas fuerzas, es decir, la única fuerza que produciría exactamente el mismo efecto dinámico que el conjunto de fuerzas que se componen”. Los distintos casos de composición de fuerzas, para hallar la resultante de equilibrio, se describen a continuación:

- Dos fuerzas concurrentes, no paralelas.
- Sistema de fuerzas concurrentes.
- Dos fuerzas paralelas.
- Sistema de fuerzas paralelas y no paralelas.

En el primer caso de dos fuerzas concurrente (no paralelas) es suficiente con hallar la fuerza resultante con el **principio del paralelogramo de fuerzas**, el cual Timoshenko y Young [7] definen mediante el siguiente enunciado:

“Dos fuerzas P_1 y P_2 , como las representadas por los vectores OA y OB [...] de la (figura 1.7-2a), son equivalentes, en su acción, a una fuerza resultante única R , que se obtiene como diagonal OC del paralelogramo construido con los vectores dados.

La misma fuerza resultante se puede obtener también, del *triángulo de fuerzas* [...] de la (figura 1.7-2b), ya que el triángulo ABC [...] de la (figura 1.7-2 a) es idéntico al triángulo OAC (figura 1.7-2b) [...]”

[Timoshenko et al. 1965, 1981, 15].

[5] Bayle, G. (1966). *Estática Gráfica*, p. 7.

[6] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estática Gráfica*, pp. 7 y 13.

[7] Timoshenko, S.P.; Young, D.H. (1965). *Teoría de las estructuras*. Segunda edición traducida en 1981, p. 15.

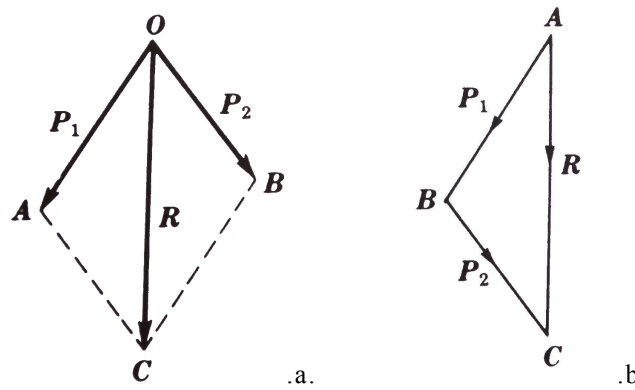


Figura 1.7-2. a) Principio del *paralelogramo de fuerzas*, b) *Triángulo de fuerzas* para el caso de dos fuerzas P_1 y P_2 concurrentes. (Imagen tomada de [Timoshenko et al. 1965, 1981, 15]).

En el segundo caso expuesto en base a la composición de fuerzas, el equilibrio de un sistema de fuerzas concurrentes se puede resolver por sucesivas aplicaciones de la ley del paralelogramo de fuerzas, como se aprecia en la figura 1.7-3a. No obstante, también se puede resolver de forma más práctica con el cierre del **polígono de fuerzas** (o polígono vectorial) para determinar gráficamente la fuerza equilibrante o resultante R , como se muestra en la figura 1.7-3b. El polígono de fuerzas se puede construir de distintas maneras según el orden en cadena que se tome de los vectores, obteniendo los correspondientes polígonos de fuerza cerrados ^{[8][9]}.

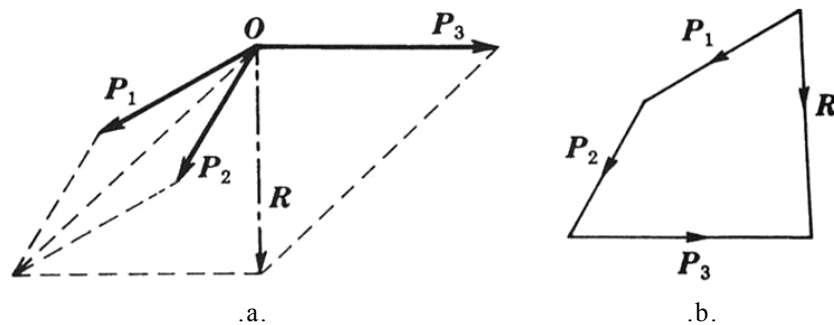


Figura 1.7-3. Resolución un sistema de fuerzas concurrentes en un plano: a) Mediante la sucesiva utilización del paralelogramo de fuerza, b) Mediante el uso del polígono de fuerzas cerrado. (Imagen tomada de [Timoshenko et al. 1965, 1981, 16]).

A diferencia del primer caso, si la composición es de dos fuerzas paralelas (tercer caso), la dificultad reside, no tanto de la intensidad de las fuerzas, sino la ubicación de los vectores en la recta de aplicación ^[8]. Será necesario encontrar el punto de referencia X respecto el cual se equilibran los momentos, de acuerdo a la ley de la palanca descrita en el apartado 1.4, así como se desprende la figura 1.7-4:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

$$\downarrow$$

$$(F_1 / F_2 = d_2 / d_1)$$

[8] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estática Gráfica*, pp. 15 y 17.

[9] Timoshenko, S.P.; Young, D.H. (1965). *Teoría de las estructuras*. Segunda edición traducida en 1981, p. 15.

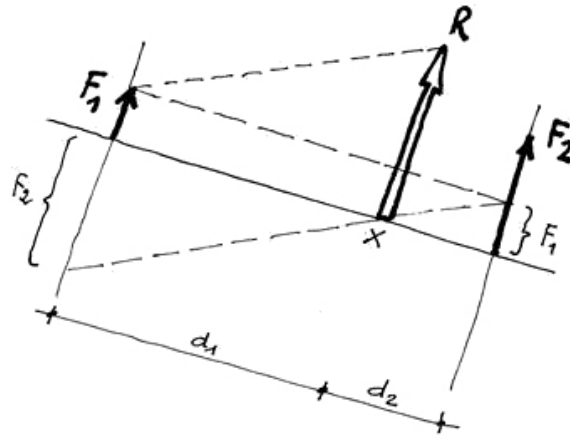


Figura 1.7-4. Resolución gráfica del equilibrio de dos fuerzas paralelas. (Imagen tomada de [Serrallonga Gasch et al. 2005, 17]).

En el caso de que fueran más de dos fuerzas paralelas se debería utilizar el método previamente distinto de forma sucesiva, empezando por la composición de las dos primeras fuerzas, cuya resultante se compondría con la tercera fuerza y, así, hasta encontrar la resultante total ^[10].

Finalmente, para el cuarto caso de composición de fuerzas correspondiente a un sistema de fuerzas paralelas y no paralelas, y no concurrentes en un único punto, es necesario utilizar el **polígono funicular**, como se muestra en la figura 1.7-5, de acuerdo a la resolución de un sistema de cuatro fuerzas P_1 , P_2 , P_3 y P_4 .

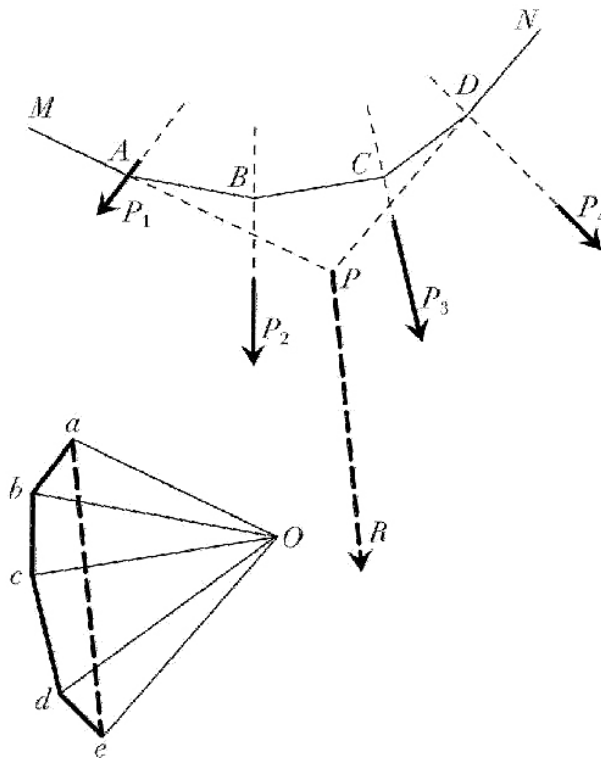


Figura 1.7-5. Resolución de un sistema de cuatro fuerzas P_1 , P_2 , P_3 y P_4 mediante el método gráfico del polígono funicular. (Imagen tomada de [Chatzis 2004, 34]).

^[10] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estática Gráfica*, pp. 15 y 17.

1.7.1 Antecedentes históricos de la Estática Gráfica

De acuerdo a lo previamente referido en el apartado 1.4, la base de la Estática Gráfica se establece cuando **Simon Stevin** (1548-1620), como resultado de sus deliberaciones, plantea y describe gráficamente el principio del paralelogramo de fuerzas, mediante la utilización de los vectores de fuerzas, así como de los polígonos de fuerzas cerrados ^[11]. Este principio no fue la única aportación de Stevin en su obra de *De Beghinselen der Weeghconst*, publicada en 1856 ^[12], sino que de acuerdo a sus investigaciones con pesos colgados de una cadena, dibujó una catenaria, mostrado en la figura 1.7-6, convirtiéndose así, como ya se indicó en el apartado 1.5.2, en la primera persona que lo planteó ^[13]. Sus aportaciones y planteamientos teóricos fueron de gran relevancia, siendo fuente de inspiración de muchos otros matemáticos y científicos, y significaron el inicio de los métodos gráficos como definen Block, DeJong y Ochsendorf ^[11] acerca del equilibrio de arcos de mampostería de acuerdo a los conocimientos y métodos gráficos de la Estática Gráfica:

“Con la introducción del principio del paralelogramo de Simon Stevin (1548-1602), el equilibrio podía ser descrito gráficamente utilizando vectores de fuerzas y polígonos de fuerzas cerrados [Stevin 1586]. Este fue el inicio del análisis del equilibrio de sistemas estructurales, y también el inicio de los métodos gráficos. Entonces fue posible explicar los resultados experimentales, como los pesos que cuelgan de una cadena y «calcular» las fuerzas de la cadena utilizando estos nuevos métodos gráficos.”

[Block et al. 2006, 14].

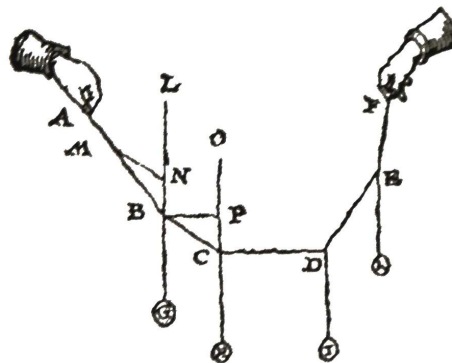


Figura 1.7-6. Equilibrio de fuerzas de un polígono funicular con pesos colgados según [Stevin 1586]. (Imagen tomada de [Kurrer 2008, 193]).

No obstante, a pesar de los avances conseguidos por Stevin en la Estática con el principio del paralelogramo, no hay constancia del uso de dicho principio en la ingeniería de la construcción hasta finales del siglo XVII e inicios del siglo XVIII. Ello se debe a que el uso de los métodos gráficos, para el análisis de elementos portantes y estructurales, todavía era poco frecuente frente al análisis con los conocimientos analíticos de la Resistencia de Materiales y la Teoría Elástica, a pesar de que éstas sólo pudieran ser utilizadas incipientemente en casos muy básicos ^[13]. No fue hasta el año 1695, con la obra *Traité de Mécanique* ^[14], y su posterior publicación en el informe *Sur la construction des voûtes dans les édifices* ^[15], cuando

[11] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, p. 14.

[12] Stevin, S. (1586).

[13] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 32 y 193.

[14] La Hire, P. de (1695).

[15] La Hire, P. de (1712/1731).

el matemático francés **Philippe de La Hire** (1640-1719) utilizó el polígono funicular y el polígono de fuerzas introducidos por **Pierre Varignon** (1654-1722) en 1687 ^[16], como se trata posteriormente, para el cálculo de las líneas de presiones, con el fin de realizar modelos teóricos que permitían encontrar las distintas situaciones de equilibrio de los arcos de mampostería analizados ^{[17][18][19]}, como se aprecia en la figura 1.7-7.

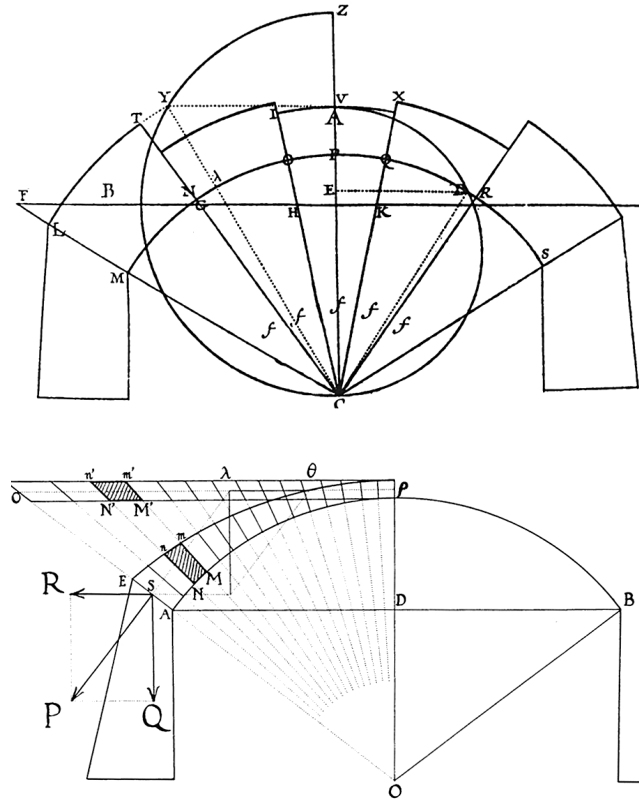


Figura 1.7-7. Determinación de la posición y tamaño de las dovelas según Pierre Couplet de acuerdo a Philippe de La Hire. (Imagen tomada de [Benvenuto 1991, 341]).

La Hire utilizó la aplicación directa del polígono funicular para desarrollar una construcción gráfica que sirvió para establecer así uno de los conceptos básicos de la Estática Gráfica. A pesar de utilizar los conceptos del polígono funicular, La Hire no hizo mención de los conceptos que había desarrollado con anterioridad Varignon ^[17]. Varignon introdujo la técnica del polígono funicular y el polígono de fuerzas de un sistema en equilibrio, en su trabajo publicado en 1687, *Nouvelle mécanique ou statique*, y publicación póstuma en 1725 ^[20], y en el cual aparece el famoso teorema de Varignon, que fue formulado así:

“Si sobre un punto material actúan simultáneamente varias fuerzas, la aceleración del punto es idéntica a la que haría tomar una fuerza única vectorialmente igual a la suma geométrica de las fuerzas dadas.”

Teorema de Pierre Varignon (1725), citado por [Doria Martí 1983, 103].

[16] Varignon, P. (1687). *Projet d'une nouvelle mécanique*.

[17] Chatzis, K. (2004). *La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIXe siècle*, p. 8.

[18] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 201.

[19] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 127.

[20] Varignon, P. (1725). *Nouvelle mécanique ou statique*.

En su obra, Varignon estableció el nombre de polígono funicular para definir su primer procedimiento gráfico de un cuerpo material. De acuerdo a Konstantinos Chatzis, Varignon utiliza el nombre de «polígono funicular» para referirse al siguiente concepto:

“Varignon emplea la expresión «polígono funicular» para designar una cuerda que es estirada por pesos o por fuerzas que no son verticales. El autor utiliza los métodos gráficos esencialmente para *definir las condiciones de equilibrio* de este objeto material, [...]”

[Chatzis 2004, 11].

La aportación de Varignon es de capital importancia ya que fue el primero en reconocer e introducir la relación ordenada entre el polígono funicular y el polígono de fuerzas, como se infiere de la figura 1.7-8, estableciendo, así, las bases de la futura Estática Gráfica que posteriormente desarrolló, en este campo, **Karl Culmann** (1821-1881) ^{[21][22][23]}.

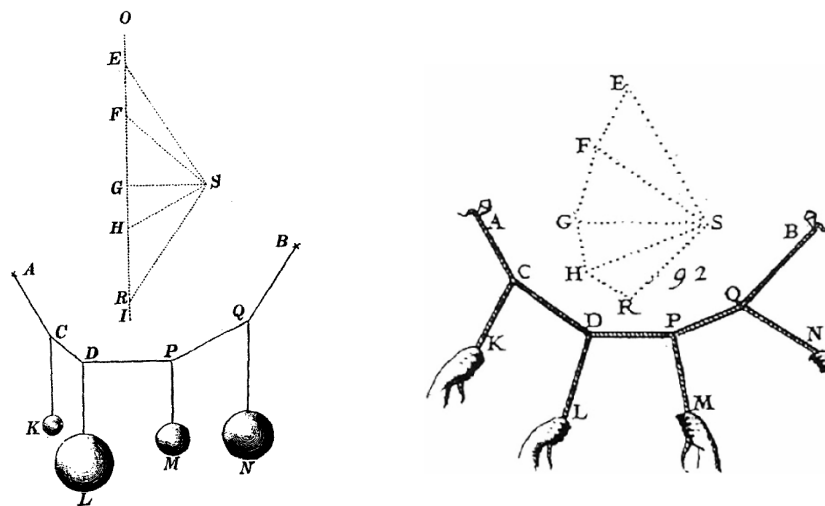


Figura 1.7-8. Polígono funicular y polígono de fuerzas de [Varignon 1725]. (Imágenes tomadas de [Rühlmann 1885, 472] y [Block et al. 2006, 14] respectivamente).

A medianos del siglo XVIII, el que había sido mejor alumno de Varignon, el matemático e ingeniero **Charles-Étienne-Louis Camus** (1699-1768) centró su trabajo en analizar con mayor profundidad el concepto de polígono funicular. Su aportación la hizo desde una perspectiva gráfica, junto a su predecesor Varignon, para definir las construcciones gráficas dobles, como se muestra en la figura 1.7-9.

Como indica Chatzis ^[21], unas décadas más tarde, entre los años 1825 y 1845, el matemático e ingeniero francés **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), se apropió de las aportaciones y avances de Camus en los procedimientos gráficos con construcciones dobles, al no nombrar sus predecesores. Poncelet utilizó dichos conocimientos para realizar estudios con puentes colgantes, una tipología estructural que floreció con fuerza en Francia a partir de la década de 1820, de acuerdo a Chatzis ^[21]

^[21] Chatzis, K. (2004). *La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIXe siècle*, p. 8.

^[22] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 998.

^[23] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 202.

en su análisis sobre la acogida y evolución de la Estática Gráfica en Francia, en el cual describe el desarrollo desde Varignon a Poncelet. En la siguiente figura 1.7-9, se puede observar el polígono funicular en la obra *Nouvelle mécanique ou statique* de Varignon, y en la obra *Le cours de mathématique* [24] de Camus.

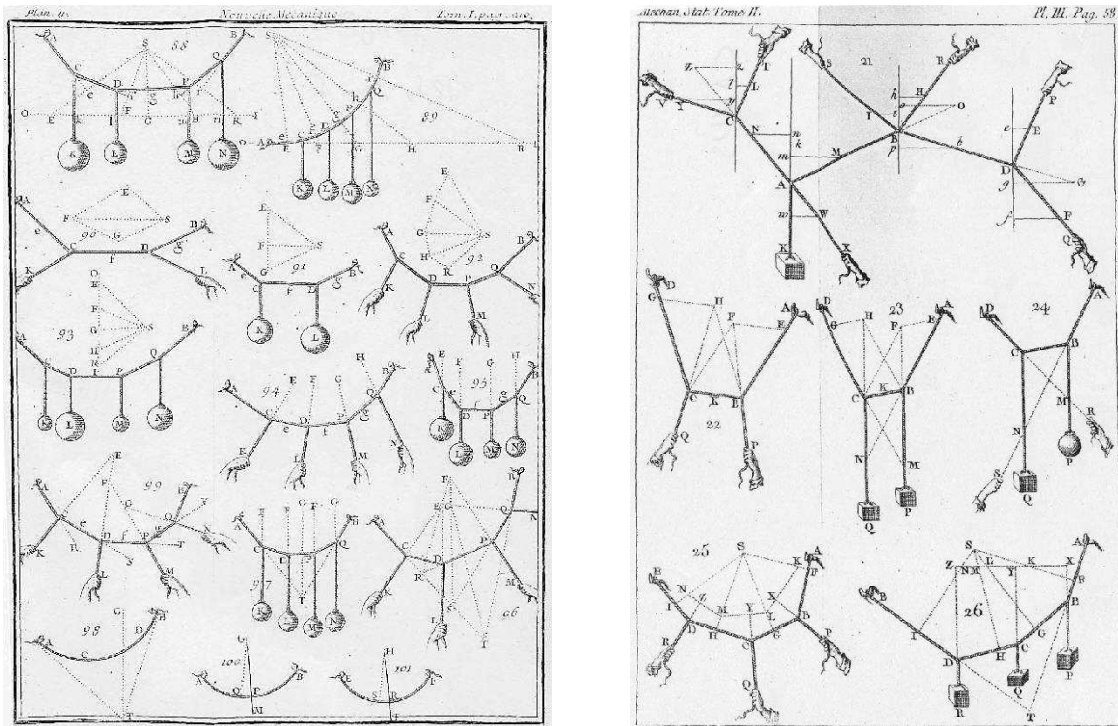


Figura 1.7-9. Estudios del polígono funicular de [Varignon 1725] y de [Camus 1752]. (Imágenes tomadas de [Chatzis 2004, 11 y 13]).

En consecuencia, del párrafo anterior, se desprende que la obra de Varignon y las aportaciones de Camus fueron muy seguidas por Poncelet, además de atender a las bases teóricas de la geometría descriptiva que estableció **Gaspar Monge** (1746-1818), tal y como indica Serrallonga [25]. Según describe Chalmers [26], Poncelet puso mucho interés en la geometría descriptiva con fines analíticos, hasta el punto que sus aportaciones y conocimientos se plasmaron en la creación de la nueva Geometría Proyectiva, en 1813 y que publicó en 1822 en su libro *Traité des propriétés projectives des figures* [27], donde estudia las propiedades descriptivas de las figuras. Es posible encontrar anotaciones complementarias sobre la construcción geométrica de Poncelet, en las notas de Saint-Venant, en ocasión de la tercera edición de la publicación de Navier, *Résumé des Leçons* [28].

Poncelet es el primero en reconocer las ventajas de los métodos gráficos frente a los métodos analíticos, al ser los primeros más expeditivos en la resolución del problemas, obteniendo resultados aproximados admisibles en la práctica, hasta el punto que el incremento de exactitud que ofrecen los métodos analíticos no compensa el esfuerzo necesario para su desarrollo frente los métodos gráficos [29][30].

[24] Camus, C.-É.-L. (1752).

[25] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 113.

[26] Chalmers, J.B. (1881). *Graphical determination of forces in engineering structures*, p. vii.

[27] Poncelet, J.-V. (1822).

[28] Navier, C.-L.M.H. (1864).

[29] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 318.

[30] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 113.

Sin duda, sus conocimientos fueron de gran importancia, puesto que, Poncelet, además de realizar una contribución de gran relevancia, a la Resistencia de Materiales, llegando a ser considerado el creador de la Mecánica de la ingeniería moderna, fue un precursor en la Estática Gráfica, ya que hacía uso de los métodos gráficos de forma sistemática para diseñar y dimensionar las distintas partes de las construcciones, que más tarde, fueron tomados, por iniciativa de Culmann, para la extensa aplicación y divulgación de los métodos gráficos para su uso en la ingeniería mecánica ^{[31][32][33]}, tal y como se describe posteriormente.

En definitiva, la aportación de los matemáticos e ingenieros franceses a la Estática Gráfica fue de gran importancia, hasta el punto que en el prólogo de la traducción francesa, *Traité de statique graphique* ^[34], Culmann rinde un homenaje a los ingenieros franceses, principalmente a Poncelet por sus aportaciones a los métodos gráficos para la teorización de roscas de arcos ^[35], y que Karl Culmann describe con las siguientes palabras:

“Poncelet, sin embargo no hizo uso, para determinar los resultados, del polígono funicular [...], y esperó a su sucesor en la Escuela de Metz, M. Michon, para hacer la primera aplicación en la determinación de los centros de la gravedad de las dovelas, en su *Théorie des voûtes*.”

Karl Culmann (1880), citado por [Chatzis 2004, 10].

La divulgación de los conocimientos de los métodos gráficos realizada por La Hire, y sus seguidores, permitió popularizarlos para el análisis del equilibrio de sistemas estructurales durante el siglo XIX, con los métodos gráficos propuestos inicialmente por Moseley ^[36] y Méry ^[37], y con posterioridad por Barlow ^[38], que hizo una demostración mediante la utilización de un modelo de arco en la institución de Ingenieros Civiles de Londres, como refieren Heyman ^[39], Snell ^[40] y Scheffler ^[41], entre otros, para analizar y establecer con rigor el equilibrio de los sistemas estructurales analizados, arcos y bóvedas, según se muestra en la figura 1.7.-10.

Dichos estudios establecieron el cálculo gráfico como una herramienta para determinar las líneas de presiones. Como indica Xanthakos ^[42], La Hire desarrolló el primer tratamiento que introdujo el concepto de las líneas de presiones, que permitían encontrar de una forma más sencilla las distintas posibles situaciones de equilibrio de los elementos analizados, y así agilizar el cálculo analítico que hasta el momento era de gran dificultad para los ingenieros ^[33].

[31] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 6 y 7.

[32] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 318.

[33] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, pp. 113 y 127.

[34] Culmann, K. (1880).

[35] Chatzis, K. (2004). *La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIXe siècle*, p. 10.

[36] Moseley, H. (1835). *On the equilibrium of the arch*.

[37] Méry, E. (1840). *Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau*.

[38] Barlow, W.H. (1846). *On the Existence (practically) of the line of equal Horizontal Thrust in Arches, and the mode of determining it by Geometrical Construction*.

[39] Heyman, J. (2001). *La ciencia de las estructuras*, p. 41.

[40] Snell, G. (1846). *On the Stability of Arches, with practical methods for determining, according to the pressure to which they will be subjected, the best form of section, or variable depth of voussoir, for any given extrados or intrados*.

[41] Scheffler, H. (1857). *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*.

[42] Xanthakos, P.P. (1994). *Theory and Design of Bridges*, p. 2.

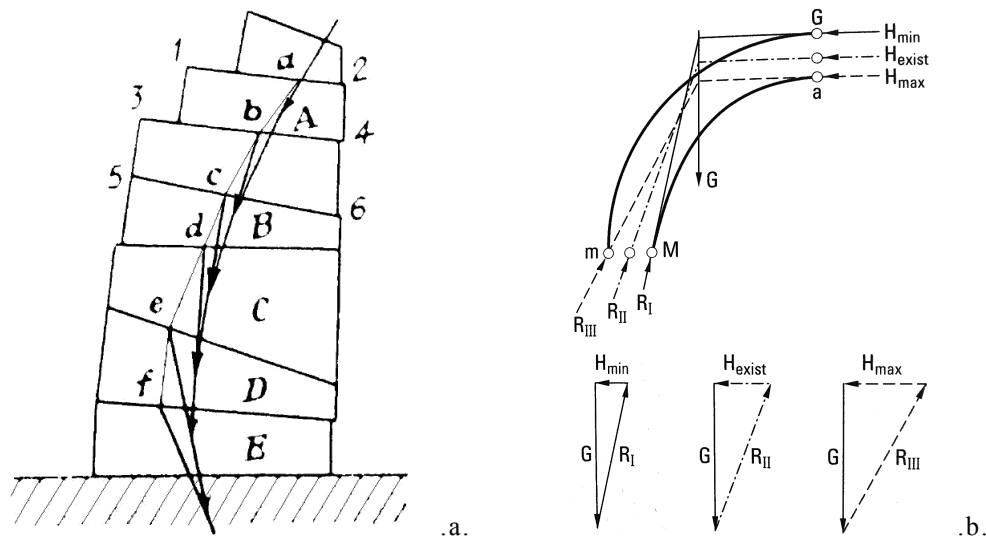


Figura 1.7-10. a) Distinción de Moseley entre la línea de presión y línea de resistencia en arcos de mampostería, b) Condiciones de equilibrio significativas de Moseley y Scheffler. (Imágenes tomadas de [Serrallonga Gasch 2003, 122] y [Kurrer 2008, 219] respectivamente).

De lo expuesto, en este epígrafe, conviene realizar una primera apreciación en cuanto a su impacto metodológico en la arquitectura e ingeniería estructural. Los métodos gráficos del polígono funicular y el polígono de fuerzas se popularizaron a lo largo del siglo XIX, junto con el progreso de la Teoría de las Estructuras durante el mismo siglo, el cual se atribuye en gran parte a **B.-P.-E. Clapeyron** (1799-1864) ^[43] en Francia, y a **William Pole** (1814-1900) ^[44] en Gran Bretaña. Este avance tecnológico se produce después de la Revolución francesa, coincidiendo con el inicio de la era del ferrocarril, siendo ambos considerados, junto con **Henry Moseley** (1801-1872) (predecesor de Pole), los precursores en el ámbito de la construcción ferroviaria ^[45]. Este cambio tecnológico producido en el siglo XIX en el ámbito de la ingeniería estructural con el apoyo científico de la Estática Gráfica, de acuerdo a las aportaciones y avances de los grandes científicos y matemáticos de la época, lo define Jaume Serrallonga Gasch con las siguientes palabras:

“La arquitectura empieza a asimilar la estática como un conjunto de principios científicos necesarios para el equilibrio de las estructuras de principios del siglo XIX. Hasta el momento, los constructores de bóvedas y arcos habían desarrollado su profesión cotidiana relativamente al margen de las distintas teorías y avances científicos. Pero después de la Revolución francesa y a partir del siglo XIX, se constata un cambio de actitud generalizada, una nueva manera de ver la ciencia y de buscar apoyo en ella. Las teorías se perfeccionan, los experimentos se multiplican y se necesitan nuevas experiencias que den apoyo a las nuevas formas de construir.

Entre todos los sabios de la época cabe destacar a Navier (1785-1836), que con su gran aportación se sitúa como el fundador de la nueva ciencia de la Resistencia de Materiales. También cabe destacar J.-V. Poncelet (1788-1867) como pionero no sólo de la Resistencia de Materiales, sino también de la Estática Gráfica.

[...] Ante la necesidad de construir con seguridad con un nuevo y moderno material de construcción, el acero, la Estática Gráfica desarrolló métodos para calcular con suficiente precisión áreas, centros de gravedad, momentos de inercia, resultantes de sistemas de fuerza, equilibrio de sólidos, etc. Entre los distintos trabajos que hicie-

[43] Clapeyron, B.P.E. (1857). *Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés*.

[44] Pole, W. (1864). *Iron bridges*.

[45] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 1 y 2.

ron avanzar esta ciencia, vale la pena citar los de F. J. Gerstner (1756-1832). A lo largo de la segunda mitad del siglo XIX se sucedieron muchos más, de los cuales destacan los estudios de K. Culmann, J. G. Schwedler, A. Ritter, el matemático L. Cremona, el físico J. C. Maxwell, O. Mohr, E. Winkler, Rebhan, G. Ritter, A. Castigliano y E. Müller-Breslau.”

[Serrallonga Gasch 2003, 113].

Como expone Charlton ^[46], fue tal el entusiasmo por el análisis gráfico durante la segunda mitad del siglo XIX que Chalmers ^[47] sugirió un curso ideal de ingeniería mecánica que debía empezar en geometría proyectiva, «la geometría moderna», que fundó Poncelet en 1813 y publicó en 1822 ^[48], la cual fue seguida por la Geometría Estática a cargo de Möbius, el cálculo de Cousinery y el polígono funicular de Varignon ^[49], que fue interpretado y desarrollado posteriormente por Culmann.

De acuerdo a lo referido, fueron muchos los avances en la investigación de las líneas de presiones para el cálculo de bóvedas y arcos, así como de puentes colgantes, principalmente de la mano de **Franz Joseph R. von Gerstner** (1756-1832). Sin embargo, esta progresión tecnológica vino dada principalmente por el ingeniero y matemático alemán Culmann, que fue enviado en el año 1849 por la *Royal Railways Commission* de Múnich durante dos años (1850-1851) para realizar una gira por Gran Bretaña y los Estados Unidos de América, y así poder estudiar constatando los avances de estos países en puentes y celosías, ya fueran de madera o de hierro forjado ^{[46][50]}. Por ejemplo, Culmann pudo asistir a la fase final de la construcción de un puente en Gran Bretaña, bajo la dirección de **Robert Stephenson** (1803-1859), que se caracterizó por realizarse con estructura tubular de hierro forjado. Así mismo, en Estados Unidos, Culmann pudo observar nuevamente el desarrollo final de la construcción de un puente, en esta ocasión, ejecutado con estructura de madera. Como indica Charlton ^[46], las conclusiones extraídas de su viaje fueron publicadas en *Allgemeine Bauzeitung* en 1851, bajo el título *A description of the latest advances in bridge, railway and boat construction in England and U.S.A.* ^[51] (“La descripción de los últimos avances en la construcción de puentes, ferrocarriles y barcos de río en Inglaterra y los Estados Unidos de Norteamérica”).

Sus escritos fueron de gran popularidad, contribuyendo sustancialmente en el desarrollo la industria del ferrocarril en 1855, especialmente, cuando asumió una de las cátedras de la *Federal Polytechnic Institute* de Zúrich, en concreto la cátedra de Ciencias de la Ingeniería que se encargaba de dirigir los proyectos ferroviarios. Dicho cargo le supuso una gran oportunidad por combinar la teoría y la práctica de la ingeniería mecánica ^[46]. Culmann centró su trabajo en el diseño y la construcción de estructuras de entramado para puentes de ferrocarril y cubiertas de hierro, “debiéndose a él, la solución gráfica de obtener la posición más desfavorable de un tren de carga al desplazarse a lo largo de una viga”, como se infiere de Guerra ^[52].

Los conocimientos adquiridos durante la gira realizada por Culmann y su posterior aplicación en la industria del ferrocarril, permitieron a Culmann establecer posteriormente las bases de la Estática Gráfica, donde enseñó a utilizar los polígonos funiculares para resolver los más diversos problemas de la ingeniería mecánica,

[46] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 58 y 169.

[47] Chalmers, J.B. (1881). *Graphical determination of forces in engineering structures*.

[48] Poncelet, J.-V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*.

[49] Varignon, P. (1687). *Projet d'une nouvelle mécanique*.

[50] Manterola Armisen, J. (2011/a). *La construcción y los materiales metálicos*, pp. 415-450.

[51] Culmann, K. (1851).

[52] Guerra Fontana, R. (s.f/a). *Tensiones y deformaciones*, p. 6.113.

especialmente en el ámbito del ferrocarril. De manera, que se considera que la *Estática Gráfica* se cimenta en los años 1850-1851, en los cuales, derivado de la gira, Culmann pudo observar y tomar notas de la construcción de distintos puentes ferroviarios de estructura de entramado o de barras que cubrían grandes luces y que estaban sometidos a la acción de grandes cargas dinámicas, producidas por trenes cargados en movimiento al paso por dichas estructuras ^[53].

Luego, en este contexto, como indican Charlton ^[54] y Kurrer ^[55], el diseño y el análisis de estructuras de entramado, como son las cerchas y las celosías, fueron de un gran impulso para la evolución de los métodos gráficos de análisis. **Robert Henry Bow** (1832-1908) pudo ver un artículo del año 1854, en el cual **J. S. Wild** (-) hacía un análisis gráfico completo de una cercha sencilla. La geometría de dicha cercha la muestra Bow en su obra recopilatoria de tipologías de estructuras de barras para cubiertas y puentes, figura 243 ^[56].

Por lo tanto, la explosión de la era del ferrocarril y la necesidad de un cambio en la forma de trabajar, propició que fueran muchos los matemáticos y científicos que utilizaron los métodos gráficos procedentes del uso del polígono funicular y del polígono de fuerzas. Este cambio de mentalidad, y de trabajar debido a la revolución producida por las necesidades en la industria del ferrocarril, lo explica de la siguiente manera Javier Manterola Armisén:

“A finales del siglo XVIII se construye el puente de Coalbrookdale (1776-1779) sobre el Severn en Inglaterra, el primer puente de fundición que dio lugar a la época más brillante de la historia de los puentes y que se desarrolló a lo largo de todo el siglo XIX. La revolución industrial cambió de una manera brusca la forma de producción, de un trabajo artesanal se pasó a un trabajo mecánico y organizado: la industrialización. Todo el espíritu inventivo, desarrollado a lo largo del siglo XVIII, cristalizó. La forma de pensar y de sentir de las gentes cambió. La realidad, su manera de entenderla, experimentó una transformación radical [...].

Las necesidades de intercambio aumentaron de una manera espectacular y con ellas las vías de comunicación que debieron ser más rápidas y seguras. El ferrocarril se extendió por Europa y Norteamérica y con él los puentes. No sólo fue necesario realizar mayor número de puentes sino que además éstos debieron salvar luces cada vez más importantes.

Para ello, fue preciso penetrar en el fenómeno resistente. Ya en 1678 Robert Hooke estableció las leyes de la mecánica estática. Con la Fundación de la «Ecole de Ponts et Chaussées» se planteó de forma sistemática el conocimiento científico del problema resistente. Los trabajos que Navier, Coulomb, Poisson, etc. desarrollaron a lo largo del siglo XIX vinieron a establecer la Resistencia de Materiales sobre bases seguras. Müller-Breslau y Castigliano siguieron sus trabajos. Rankine publicó su *Mecánica aplicada* en 1858 y Culmann su *Estática Gráfica* en 1866.”

[Manterola Armisén 1984, 7].

Como indica Charlton ^[54], el uso de los métodos gráficos para el diseño y análisis de estructuras de entramado de barras, implicó que la competencia para proyectar y dimensionar este tipo de estructuras se derivara a los proyectistas de ingeniería mecánica, atribuyendo su origen a **William John Macquorn Rankine** (1820-1872) con su obra *A Manual of Applied Mechanics* ^[57] y **James Clerk Maxwell** (1831-

^[53] Silva Suárez, M. (2011). Presentación. *Técnica e ingeniería en España*, p. 35.

^[54] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 6.

^[55] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 322.

^[56] Bow, R.H. (1873). *Economics of construction in relation to framed structures*, p. 33.

^[57] Rankine, W.J.M. (1858).

1879) con su obra publicada *On reciprocal figures and diagrams of forces* ^[58], a pesar de que Bow reconociera a Wild como el primero en utilizar los métodos gráficos para el análisis completo de una cercha.

No obstante, ya se atribuya el uso del análisis gráfico en la Estática a Wild, Rankine o Maxwell es importante constatar que esta práctica no era una novedad, tal y como se ha visto previamente con el polígono funicular de Varignon y las grandes aportaciones de Poncelet a la geometría con fines analíticos. El polígono funicular de Varignon en su publicación póstuma en el año 1725 con su obra *Nouvelle Mécanique ou Statique* ^[59], y la célebre obra de **Charles-Augustin de Coulomb** (1736-1806) acerca de la Mecánica de suelos para determinar las presiones sobre el terreno, así como sus estudios sobre estructuras de mampostería junto con las aportaciones de **Pierre Couplet** (?-1743) y **Bernard Foster de Bélidor** (1698-1761) en la teoría de los arcos de mampostería (en las primeras décadas del siglo XVIII), son notables ejemplos de la utilización del análisis gráfico en el siglo XVIII ^{[60][61]}, como se muestra en la figura 1.7-11.

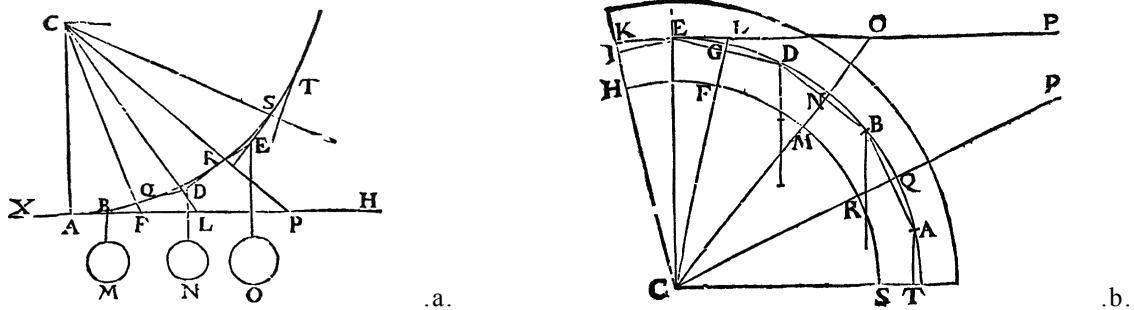


Figura 1.7-11. Primer modelo de mampostería de [La Hire 1730]: a) Derivado del polígono funicular, b) Después de la inversión para formar el modelo de cuña. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 202]).

A pesar de todos los predecesores en el uso y teorización de los métodos gráficos descritos anteriormente, la Estática Gráfica se fundó como una nueva disciplina, entre los años 1864 y 1866, con la célebre publicación de Culmann, *Die graphische Statik* ^[62] (“La Estática Gráfica”), que permitió establecer un potente y riguroso método de análisis para determinar el equilibrio de celosías, arcos, cables, así como de otros sistemas estructurales, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX, mediante el equilibrio de fuerzas ^{[60][63][64]}.

Los dos primeros capítulos del trabajo de Culmann, se publicaron en el año 1864 y los otros seis capítulos fueron publicados en 1866, siendo Culmann quien estableció las bases de la Estática Gráfica y del análisis gráfico para resolver los más diversos problemas de la Estática en el ámbito de la ingeniería mecánica, aplicando los polígonos funiculares de Varignon ^{[60][61][64][65][66][67]}.

[58] Maxwell, J.C. (1864).

[59] Varignon, P. (1725).

[60] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 7.

[61] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, pp. 317 y 318.

[62] Culmann, K. (1864/1866).

[63] Block, P.; DeJong, M.; Ochsendorf, J. (2006). *As Hangs the Flexible Line: Equilibrium of Masonry Arches*, pp. 14 y 15.

[64] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 127.

[65] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 997.

[66] Manterola Armisen, J. (1984). *Evolución de los puentes en la historia reciente*, p. 7.

[67] Maurer, B. (1998). *Karl Culmann und die graphische Statik*, p. 151.

Esta monografía, *Die graphische Statik*, fue la culminación de sus excelentes contribuciones al análisis gráfico, y que dejó constancia del dominio de Culmann en esta materia, en parte gracias a sus conocimientos y experiencia en el ámbito de la construcción del ferrocarril, en un momento de gran demanda en el conocimiento de la Teoría de las Estructuras de entramado para el diseño de nuevos y económicos puentes, permitiendo a Culmann ser profesor de Teoría de Estructuras en el Politécnico de Zürich desde el año 1855 ^[68]. Para poder desarrollar sus nuevas funciones en el diseño de puentes ferroviarios, en las cuales debía combinar la teoría y la práctica de la ingeniería, Culmann tuvo la necesidad de desarrollar los métodos de Navier para la resolución de estructuras hiperestáticas ^[69]. Estuvo muy influenciado por la obra *Résumé des Leçons*, de Navier ^{[70][71]}, en su análisis de tensiones y deformaciones, hecho que motivó su apoyo a la teoría de la uniconstante elástica, centrada en el módulo de deformación longitudinal frente al transversal.

Se considera, pues, que Culmann fue un pionero de los métodos gráficos en la ingeniería mecánica como describen Guerra ^[72] y Hartenberg ^[73], a pesar de que unos años antes, en concreto el 1826, Navier comenzase a considerar los problemas de la Estática Gráfica, pero fue Culmann, con su principal obra quien la popularizó, al establecer de forma directa la relación estructural entre el polígono funicular y el polígono de fuerzas, así como sus reciprocidades, como se muestra en las figuras 1.7-12 y 1.7-13, a través de la correlación plana de la geometría proyectiva ^{[74][75][76]}.

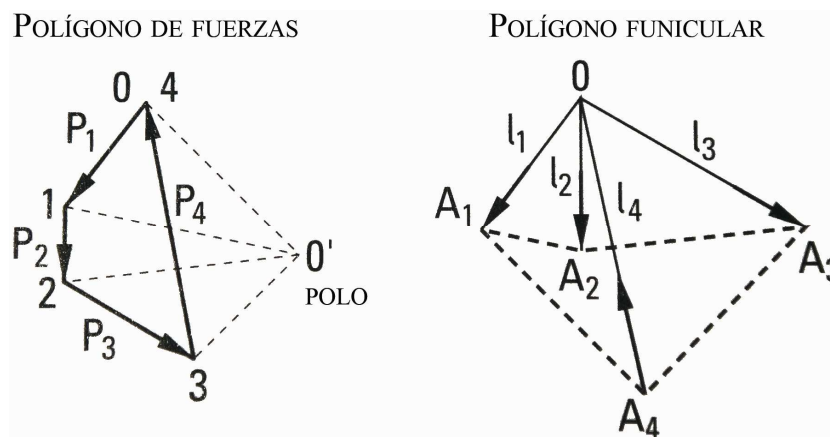


Figura 1.7-12. Relación entre el polígono de fuerzas y el polígono funicular para sistemas de fuerzas planos según Culmann de acuerdo a [Kurrer 2002]. (Notación adaptada de [Gerhardt et al. 2003, 998]).

^[68] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 7 y 169.

^[69] Navier, C.-L.M.H. (1820). *Leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'Application de la Mécanique*.

^[70] Navier, C.-L.M.H. (1826). *Résumé des leçons données à l'Ecole Royale des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. 1^{re} partie: Leçons sur la résistance des matériaux et sur l'établissement et en charpente*.

^[71] Navier, C.-L.M.H. (1864). *Résumé des leçons données à l'Ecole Royales des Ponts et Chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines. Première section, De la Résistance des corps solides, par Navier. Avec des notes et des appendices par M. Barré de Saint-Venant*.

^[72] Guerra Fontana, R. (s.f./a). *Tensiones y deformaciones*, p. 6.113.

^[73] Hartenberg, R.S. (1981). *Culmann, Karl*, pp. 495 y 496.

^[74] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 998.

^[75] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 320.

^[76] Scholz, E. (1989). *Symmetrie, Gruppe, Dualität. Zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, pp. 174 y 193-199.

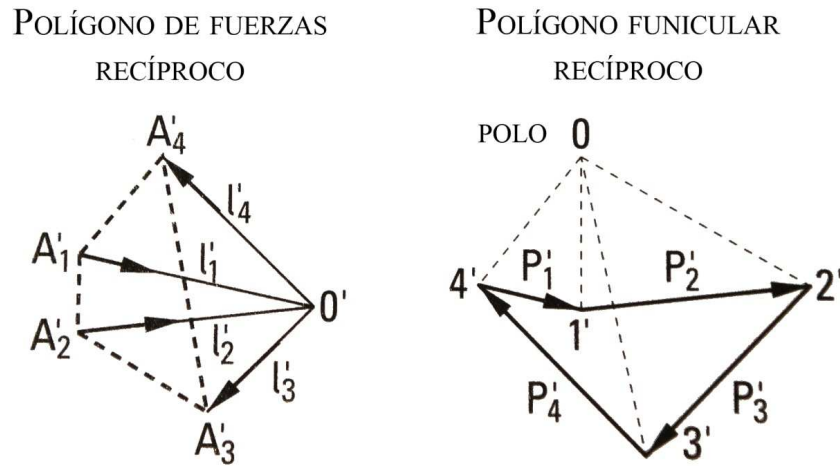


Figura 1.7-13. Reciprocidades del polígono de fuerzas y del polígono funicular para sistemas de fuerzas planos según Culmann de acuerdo a [Kurrer 2002]. (Notación adaptada de [Gerhardt et al. 2003, 998]).

Maxwell y Luigi Cremona (1830-1903) desarrollaron, respectivamente, los diagramas recíprocos y la teoría acerca de la Estática Gráfica que introdujo Culmann, basada en la geometría proyectiva ^[77].

Cabe reincidir, en resumen, en que Culmann fue un gran divulgador, recopilando todos aquellos conocimientos anteriores que era necesario poner en concordancia, especialmente inspirado en las bases teóricas de la nueva geometría en la obra del matemático Poncelet en la Geometría Proyectiva ^[78], además de la Geometría Estática que enseñaban Möbius ^[79] y Cousinery ^[80], y las propiedades del polígono funicular de Varignon ^[81], como exponen Chalmers ^[82], Charlton ^[83] y Chatzis ^[84].

Finalmente, Culmann publicó en 1875 una segunda versión revisada de *Die Graphische Statik* ^[85], en la cual quiso dar un fundamento matemático a la relación entre el polígono funicular y el polígono de fuerzas y sus reciprocidades que tanto trabajó gráficamente. Sin embargo, Culmann no consiguió su propósito, ya que centró la mayor parte de sus estudios y trabajos desde un tratamiento abstracto, de forma que no pudo fundamentarlo rigurosamente desde una vertiente explícitamente analítica, tal y como hubiese deseado ^[86].

La obra de Culmann tuvo una gran influencia en posteriores generaciones de ingenieros, algunos de ellos tan conocidos como **Maurice Koechlin** (1856-1946) y **Christian Otto Mohr** (1835-1918). Este último, el cual requerirá una mención especial posteriormente, aplicó los conocimientos adquiridos de su maestro Culmann para el estudio de la línea estática con respecto al estudio de las deformaciones de las estructuras ^[83].

^[77] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 320.

^[78] Poncelet, J.-V. (1822). *Traité des propriétés projectives des figures*.

^[79] Möbius, A.F. (1837). *Lehrbuch der Statik*.

^[80] Cousinery, B.-E. (1839). *Calcul par le Trait, ses Éléments et ses Applications*.

^[81] Varignon, P. (1725). *Nouvelle mécanique ou statique*.

^[82] Chalmers, J.B. (1881). *Graphical determination of forces in engineering structures*, p. vii.

^[83] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, pp. 7 y 171.

^[84] Chatzis, K. (2004). *La réception de la statique graphique en France durant le dernier tiers du XIXe siècle*, p. 10.

^[85] Culmann, K. (1875).

^[86] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 998.

Mohr tuvo un interés especial en los métodos gráficos y los aplicó para resolver problemas de Teoría de Estructuras, siendo su aportación tan valiosa, que se debe considerar un innovador y propulsor de la ciencia de la Estática Gráfica. En base a la similitud entre la ecuación diferencial de la curva funicular y la ecuación diferencial de la línea elástica, en acepción a Serrallonga ^[87], “encontró métodos gráficos para deducir el diagrama de momentos flectores y de deformaciones de flexión de una viga. Con ello, estudia las deformaciones por flexión y deduce dos teoremas de cálculo de deformaciones a partir de la elástica, los Teoremas de Mohr (1º y 2º). Otra gran aportación la realizó en el campo de la representación y el análisis de las tensiones en un punto de un cuerpo sometido a distintas acciones. A partir de un estado de esfuerzos normal y tangencial que actúa sobre un determinado elemento, y que deriva en cada punto concreto en un **determinado estado de tensiones, con su círculo, Mohr, hizo posible determinar gráficamente el valor y la dirección de las tensiones principales**”, como se tratará posteriormente.

El suizo **Wilhelm Ritter** (1847-1906), alumno de Culmann y profesor en *Riga Polytechnical Institute* perpetúa el legado de la Estática Gráfica con su trabajo, *Anwendungen der graphischen Statik* ^[88]. Su obra fue el mayor trabajo publicado de la Estática Gráfica que no se debe confundir con la obra del alemán **August Ritter** (1826-1908), contemporáneo de Culmann en la *Aix-la-Chapelle*, que trató acerca de la teoría en el cálculo de puentes de hierro y cubiertas ^[89], traducido al inglés ^[90], en 1879 por **Matthew Henry Sankey** (1853-1926). Durante el transcurso de esta tarea, Sankey se dio cuenta que Ritter lo nombró el *método de las secciones*, aunque ya había sido descubierto por Rankine el año 1858 cuando el libro de August Ritter apareció. Así mismo, la popularidad de la Estática Gráfica fue tal que fue impulsada en Francia, entre los años 1870 y 1880, por **Maurice Levy** (1838-1910), pupilo de Saint-Venant que contribuyó a la modernización de la Estática Gráfica en Francia ^[91], junto con la contribución de **Victor-Joseph Williot** (1843-1907) con su método para determinar gráficamente deformaciones de entramados de barras, como expone Charlton ^[92].

La Estática Gráfica fue promovida en Alemania por **Heirich Franz Bernhard Müller-Breslau** (1851-1925), con su obra *Die Graphische Statik der Baukonstruktionen* ^[93] y por Mohr con su obra *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik* ^[94]. Por **Luigi Cremona** (1830-1903), en Italia, con su obra traducida al inglés en 1890: *Graphical statics. Two treatises on the graphical calculus and reciprocal figures in graphical statics* ^[95], como indica Charlton ^[92].

La gran ventaja de la Estática Gráfica reside en que permite resolver sistemas articulados de barras coplanarias, para determinar las fuerzas exteriores (reacciones), pero a la vez las fuerzas interiores de las barras (esfuerzos). Hay distintos métodos ya sean gráficos o analíticos para la resolución de éste tipo de estructuras. Las técnicas de la Estática Gráfica fueron utilizadas durante el XIX y principios del siglo XX para el cálculo de estructuras isostáticas planas (como por ejemplo las celosías planas), de las cuales las técnicas más usadas fueron, a parte del *Teorema de las tres fuerzas*, las que se describen a continuación:

^[87] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 128.

^[88] Ritter, W. (1888-1906).

^[89] Ritter, A. (1862). *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach- und Brückenkonstruktionen*.

^[90] Sankey, M.H. (1879). *Elementary theory and calculation of iron bridges and roofs*.

^[91] Levy, M. (1874). *La statique graphique et ses applications aux constructions*.

^[92] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 8.

^[93] Müller-Breslau, H.F.B. (1887, 1892, 1903/a).

^[94] Mohr, O. (1906).

^[95] Cremona, L. (1890).

- El procedimiento gráfico del *polígono funicular*.
- El *método de los nudos*, también conocido como el diagrama de Cremona-Maxwell.
- El *método de las secciones*, que comprende a su vez el método de Culmann y el método de August Ritter.

1.7.2 Polígono funicular

Como se ha expuesto previamente, el procedimiento gráfico del **polígono funicular**, permite resolver distintos y variados problemas relativos al equilibrio, como calcular las reacciones y las fuerzas resultantes a partir de un conjunto o sistema de fuerzas de un mismo plano, no concurrentes, así como hallar los diagramas de momentos flectores de las vigas o determinar la forma ideal de un arco u otro tipo de elemento resistente como es, por ejemplo, una estructura porticada para garantizar que todos los tramos del mismo trabajen a compresión, entre otras aplicaciones. El polígono funicular, junto con el polígono de fuerzas, ambos introducidos por el matemático francés Varignon fueron las bases de la Estática Gráfica.

El nombre del polígono funicular se define de acuerdo a la forma que adoptaría un cordón o cuerda pequeña (del latín: *funiculum*) al aplicar dichas fuerzas, ya que representa la forma de equilibrio de un hilo sometido a la acción de un sistema de fuerzas. El método permite definir la forma de una cuerda colgando con pesos adjuntos gráficamente, como plantea, en el anteriormente mencionado apartado 1.4, Stevin en su libro *L'art pondénaire ou la statique*, de acuerdo al ley del paralelogramo de fuerzas, “el equilibrio podría describirse gráficamente mediante vectores de fuerza y polígonos de fuerza cerrados” ^[96].

Las dos reglas básicas para las construcciones relativas a los polígonos funiculares las define Georges Bayle, expresadas literalmente, así:

- **Regla 1:** Sobre cada una de las fuerzas dadas se encuentra un vértice del polígono funicular. Los lados que pasan por ese vértice son paralelos a los radios vectores que sobre la figura recíproca concurren en los extremos de la fuerza en cuestión.
- **Regla 2:** En el polígono funicular, un lado cualquiera comprendido entre una fuerza dada y la siguiente, es paralelo al radio vector que une el polo con el vértice en que se cortan, sobre el polígono vectorial, las dos fuerzas en cuestión.

[Bayle 1966, 10].

1.7.3 El diagrama de esfuerzos de Cremona-Maxwell o *método de los nudos*

El **diagrama de esfuerzos de Cremona-Maxwell**, también conocido como el *método de los nudos*, consiste en un método gráfico sistemático que establece que cada nudo está en equilibrio, de forma que la resultante de fuerzas que actúan sobre cada barra de un mismo nudo se equilibran. La resolución de este método se basa en las tres ecuaciones de equilibrio ($\sum F_H = 0$; $\sum F_V = 0$; $\sum M_{nudo} = 0$) ya que no se encuentran más de dos barras, con la fuerza axial desconocida, en cada nudo analizado y dado que son concurrentes en dicho nudo. El método de los nudos permite determinar las fuerzas axiales en barras coplanarias de estructuras isostáti-

^[96] Stevin, S. (1586).

cas (celosías o armaduras planas) de nudos articulados con cargas en los nudos. La suma vectorial de las fuerzas actuantes, sobre cada barra se equilibran gráficamente ^[97], como se muestra en la figura 1.7-14.

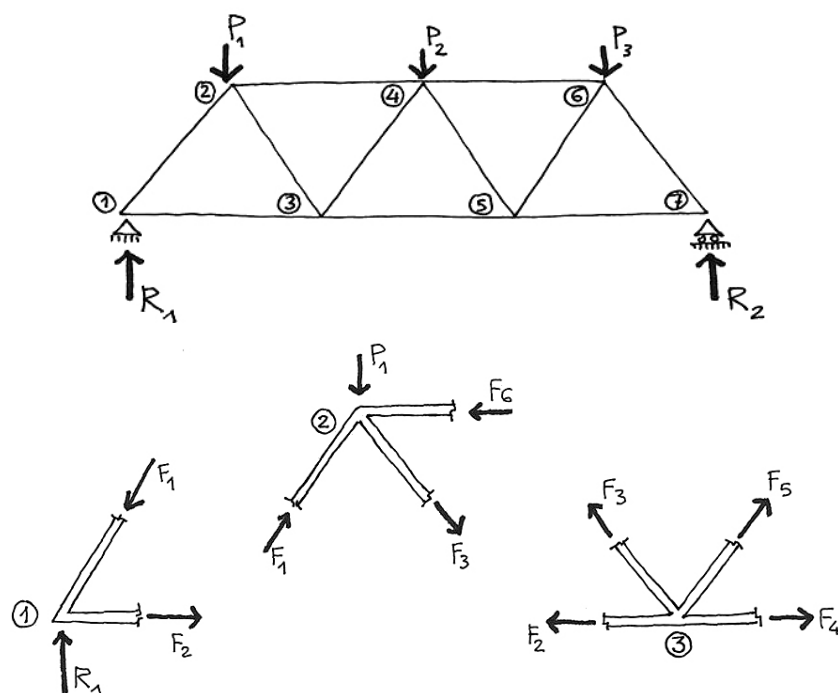


Figura 1.7-14. Resolución de una armadura con el método de los nudos. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 2004/b, 51]).

Las diferencias del diagrama de Maxwell, para sistemas articulados poliédricos, fueron pocas en relación al diagrama de Cremona. Para cada nudo, que se analiza de forma aislada, existe un polígono de fuerzas cerrado entre las fuerzas exteriores e interiores que concurren en un punto. El diagrama se traza progresivamente mediante la yuxtaposición de los distintos polígonos de fuerzas que representan gráficamente el equilibrio de cada uno de los nudos de una estructura, obteniendo una figura única que recibe el nombre de diagrama de Cremona-Maxwell, como indica Doria ^[98].

1.7.4 El método Ritter o método de las secciones

El **método de Ritter** debe su nombre al ingeniero alemán August Ritter, a pesar que el método originalmente era de Schwedler ^[99], basado en cortes verticales que seccionaban tres barras, como se ha expuesto en el apartado 1.6. También conocido como el *método de las secciones* es un método, basado en la utilización de la ecuación de equilibrio de momentos ^[98], desarrollado para el estudio de estructuras isostáticas de nudos articulados y con cargas puntuales en los nudos, el cual se puede desarrollar indistintamente por métodos gráficos o analíticos ^[100]. El método de August Ritter consiste en realizar un corte o una sección transversal de la celosía de forma que resulten exclusivamente tres incógnitas (axiales). Para ello, se deben intersectar un máximo de tres barras (una de las cuales no sea paralela a las

[97] Brufau Niubó, R. (2004/b). *La flexió a les estructures metàl·liques. Les encavallades*, p. 51.

[98] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, pp. 461 y 465.

[99] Schwedler, J.W. (1851). *Theorie der Bruckenbalkensysteme*.

[100] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estàtica Gràfica*, pp. 103 y 104.

otras dos), como se aprecia en la figura 1.7-15, y plantear las ecuaciones de equilibrio de la Estática a una parte de la estructura analizada, y que Camilo Doria Martí describe consecuentemente:

“(El método de August Ritter) se basa precisamente en la utilización de la ecuación de equilibrio de Momentos, considerando toda una *Sección* (transversal) de la armadura como «Sólido Libre» en equilibrio, bajo la acción de un sistema de fuerzas coplanarias no concurrentes. La ventaja del método radica, en que los esfuerzos en casi todos los miembros puedan hallarse directamente, mediante el estudio de una sección de corte a dicho miembro. Esta es la verdadera aplicación”.

[Doria Martí 1983, 465].

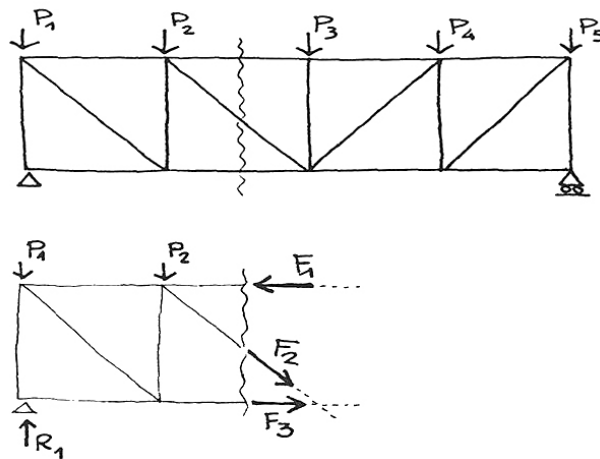


Figura 1.7-15. Resolución de una armadura con el *método de las secciones*. (Imagen tomada de [Brufau Niubó 2004/b, 53]).

1.7.5 El método de Culmann

El **método de Culmann** es un procedimiento gráfico, equivalente al *método de las secciones*, que permite obtener esfuerzos internos de tres barras de estructuras trianguladas, de acuerdo a las acciones actuantes y las reacciones, sin la necesidad de resolver toda la estructura ^[101], mostrado en la figura 1.7-16. Al tratarse de un método únicamente gráfico que se basa en la descomposición de tres fuerzas no concurrentes tiene ciertas limitaciones ya que, en ocasiones, no es posible su utilización para resolver determinadas estructuras de entramado o celosías.

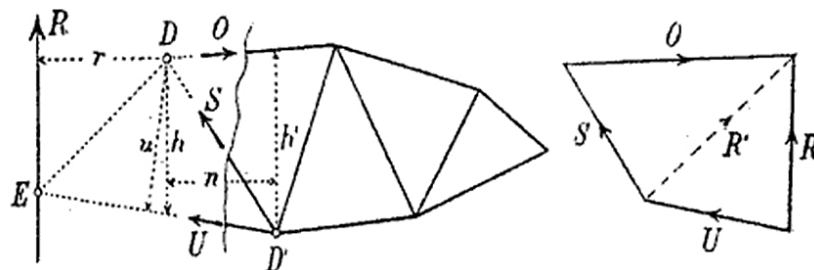


Figura 1.7-16. Resolución de una armadura con el método de Culmann. (Imagen tomada de [Serrallonga Gasch et al. 2005, 100]).

^[101] Doria Martí, C. (1983). *Física mecánica*, p. 467.

1.7.6 Aplicaciones de la Estática Gráfica. Estudios del comportamiento estructural con modelos grafostáticos

El excelente trabajo de recopilación realizado por Culmann, junto con sus grandes aportaciones en el ámbito de la ingeniería mecánica a través del uso del polígono funicular y del polígono de fuerzas, así como, los trabajos desarrollados por sus seguidores, especialmente de Wilhelm Ritter con su obra *Anwendungen der graphischen Statik* ^[102], ambos tratados en el precedente epígrafe, permitieron a la técnica de la ingeniería mecánica disponer de una herramienta de gran utilidad mediante la aplicación de la Estática Gráfica, para así comprender el comportamiento estructural de los elementos y objetos constructivos. Estos trabajos establecieron un medio esencial para la práctica de la ingeniería mecánica, hasta el punto que supuso el primer manual de normas para su uso profesional ^[103].

Un claro ejemplo de la utilización de la Estática Gráfica para resolver gráficamente un problema de la Estática es el polígono funicular que utiliza Culmann para determinar el diagrama de momentos flectores de una viga simplemente apoyada, como se infiere de la figura 1.7-17.

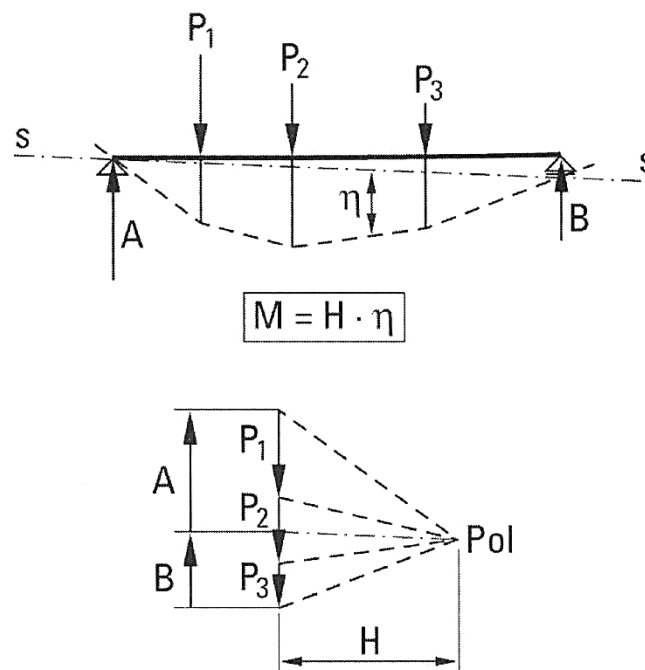


Figura 1.7-17. Solución gráfica de Culmann para determinar el diagrama de momentos flectores de una viga biapoyada según el polígono funicular y polígono de fuerzas. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2002, 224]).

En este contexto, fueron varios los ingenieros, como eran Rankine, Maxwell, Cremona, Bow o Mohr, quienes utilizaron los métodos gráficos para resolver distintos problemas de la Estática, algunos de ellos ya expuestos previamente en este apartado. En el caso de Rankine, utilizó el polígono funicular para investigar y analizar celosías de entramado estáticamente determinadas ^[104], mostrado en la figura 1.7-18.

^[102] Ritter, W. (1888-1906).

^[103] Gerhardt, R.; Kurrer, K-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 997.

^[104] Rankine, W.J.M. (1858). *A Manual of Applied Mechanics*.

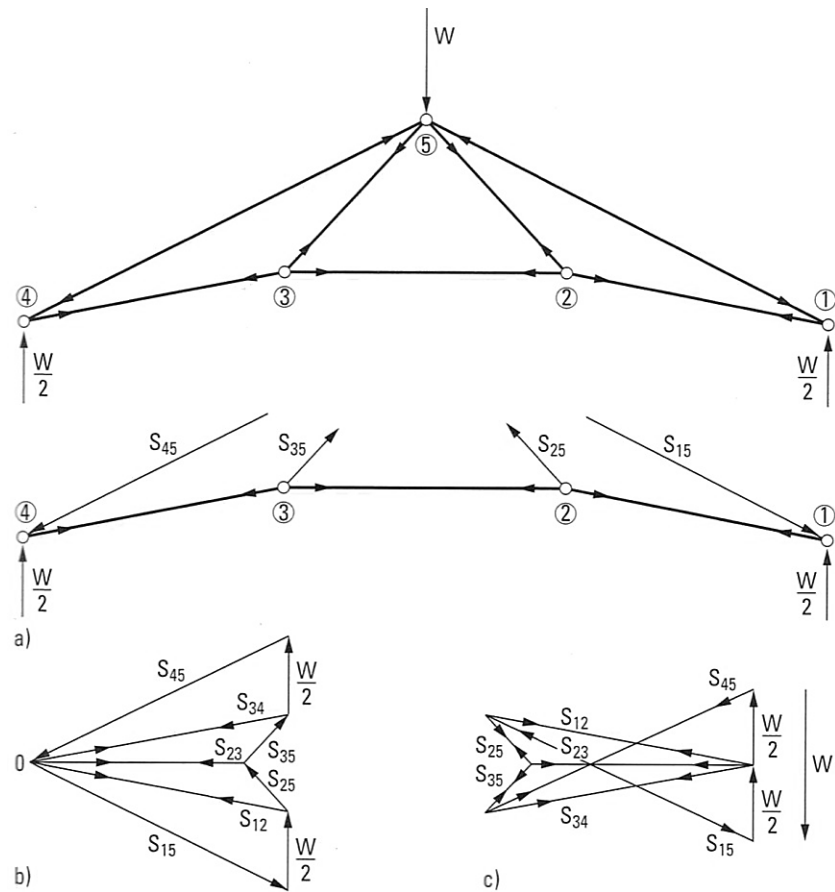
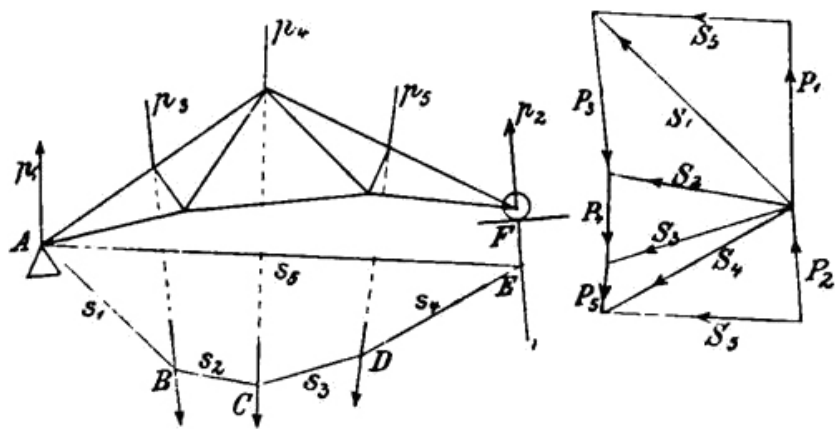


Figura 1.7-18. Geometría y análisis de una celosía de entramado estáticamente determinada según [Rankine 1858, 1872]: a) Cordon inferior como un polígono funicular, b) Solución de [Rankine 1858], c) Solución de [Rankine 1872]. (Imágenes tomadas de [Kurrer 2008, 321]).

La aplicación de los métodos gráficos, para la resolución de estructuras de entramado o celosías planas, fueron ampliamente utilizados como se ha tratado anteriormente. En la figura 1.7-19, se muestra la resolución de una armadura plana realizada por Mohr ^[105], mediante el polígono funicular y el polígono de fuerzas.



La característica principal de las vigas de celosía analizadas mediante métodos de la Estática Gráfica es que se tratan de estructuras planas, de uniones articuladas y con acciones únicamente en los nudos. Por ello, cuando se hace referencia a los correspondientes polígonos funiculares, las barras podrán estar sometidas a tracción o a compresión. Para estudiar su equilibrio, nos basaremos en el principio que describe Georges Bayle:

“Cuando un conjunto de puntos materiales está en equilibrio bajo la acción de un sistema de fuerzas, este equilibrio no se altera si se introducen nuevos enlaces entre ellos.”

[Bayle 1966, 50].

De esta forma, la Estática Gráfica dotó a los ingeniero de las herramientas necesarias para establecer una relación entre el diseño, el análisis y la construcción de las estructuras, teniendo una visión más global y completa de ellas, permitiendo racionalizar las tareas de diseño estructural y obtener, así, formas estructurales optimizadas y de mayor eficiencia estructural de acuerdo a las cargas a soportar ^[106], como se aprecia en la figura 1.7-20.

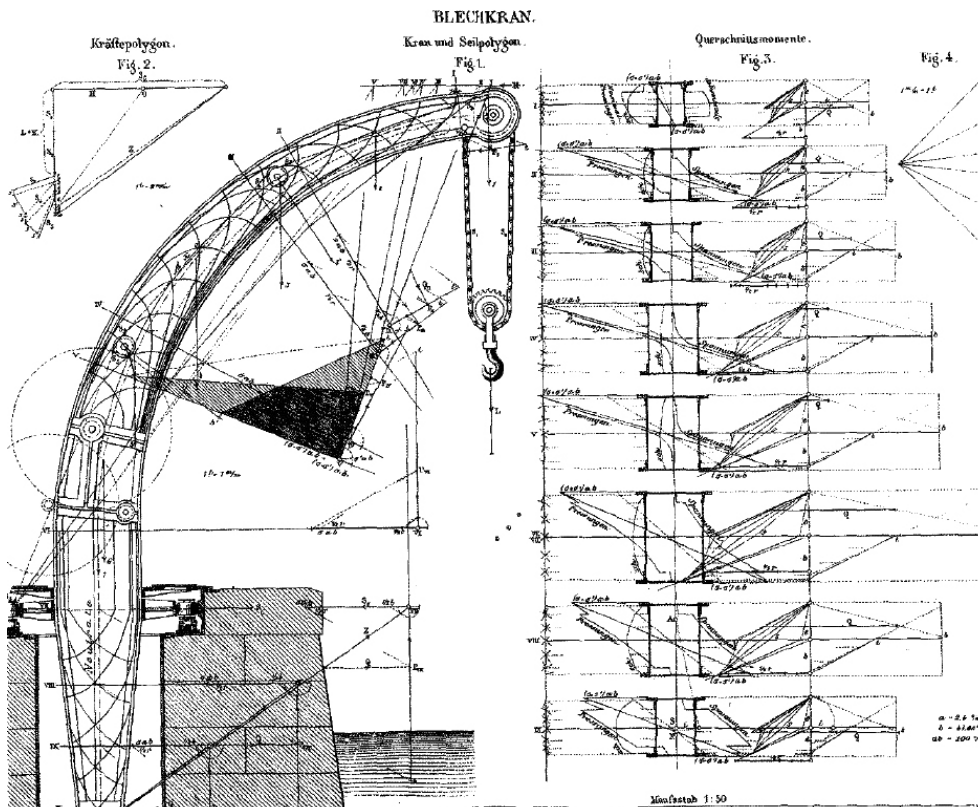


Figura 1.7-20. Solución gráfica de [W. Ritter 1888] para el diseño optimizado de una grúa metálica. (Imagen tomada de [Gerhardt et al. 2003, 1000]).

La Estática Gráfica alcanzó su máxima aplicación en las dos últimas décadas del siglo XIX, como demostró otro destacado alumno de Culmann, el mencionado Koechlin, cuando analizó gráficamente la Torre Eiffel de París, para calcular los

^[106] Gerhardt, R.; Kurrer, K-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 997.

esfuerzos internos, utilizando la Estática Gráfica, de la emblemática torre inaugurada en 1889 con motivo de la Exposición Universal de París ^{[107][108][109]}.

Sin embargo, a finales de 1890 y principios de 1900 se constata un cambio de tendencia, en el cual, los métodos grafostáticos aplicados a la construcción pierden relevancia, debido a los avances en los métodos analíticos, “lo que implicó un nivel mayor de racionalización de los métodos de diseño estructural, pero al mismo tiempo la ruptura de la unidad conceptual entre diseño, cálculo y construcción, conceptos que la Estática Gráfica mantenía unificada en la práctica”, de acuerdo a Gerhardt, Kurrer y Pichler ^[107]. No obstante, se siguen utilizando los métodos gráficos para visualizar y comprender las estructuras diseñadas, como se muestra en la figura 1.7-21, en la cual se puede observar los diagramas realizados por Cremona comparando los diagramas de fuerzas obtenidos con análisis gráfico de dos vigas en celosías de igual luz, pero distinto canto, para un mismo estado de cargas y condiciones de equilibrio.

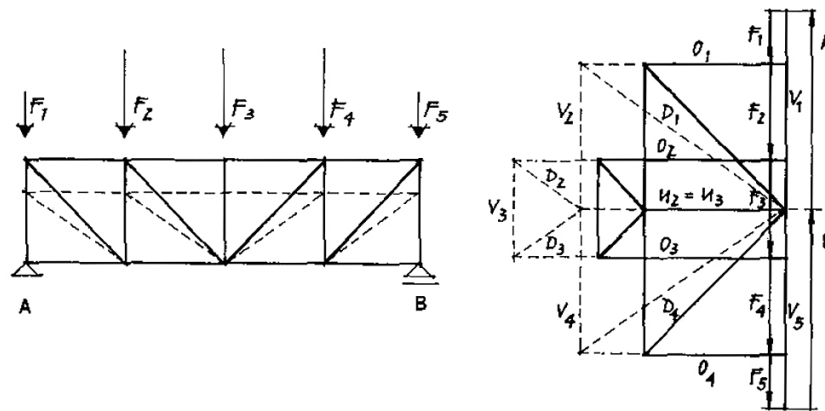


Figura 1.7-21. Comparación de los diagramas de fuerzas realizados por Cremona para vigas de celosía biapoyadas de distinto canto. (Imagen tomada de [Gerhardt et al. 2003, 1001]).

La optimización desde el diseño estructural es posible gracias a la utilización de los métodos gráficos del polígono funicular y el polígono de fuerzas, como se muestra en los gráficos de la figura 1.7-22, comparando dos pórticos articulados en la base, pero con distinta posición de la rótula de la viga (caso 1: una rótula central en la viga; caso 2: una rótula desplazada hacia el extremo izquierdo de la viga). La utilización de los métodos gráficos nos permite determinar las reacciones en los apoyos y los diagramas de momentos flectores de las estructuras. Así, en el segundo caso el cambio de la posición de la rótula hacia el extremo izquierdo de la viga provoca un aumento de la flecha del antifunicular de las cargas, reduciendo de forma considerable los momentos flectores máximos resultantes a la vez que una reducción de la componente horizontal de las reacciones en los apoyos, resultando éstas con una mayor verticalidad, como se infiere de la figura 1.7-22, indicada. De la misma forma, también se puede utilizar este procedimiento gráfico para estructuras hiperestáticas. En concreto, Gerhardt ^[110] plantea optimizar las estructuras adaptando la forma de la estructura o elemento resistente de acuerdo a la línea de carga o línea de empujes.

^[107] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, pp. 1000 y 1001.

^[108] Charlton, T.M. (1982). *A history of theory of structures in the nineteenth century*, p. 171.

^[109] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 94.

^[110] Gerhardt, R. (2002/b). *Reflections on the application of graphical methods to statical problems*, pp. 381-383.

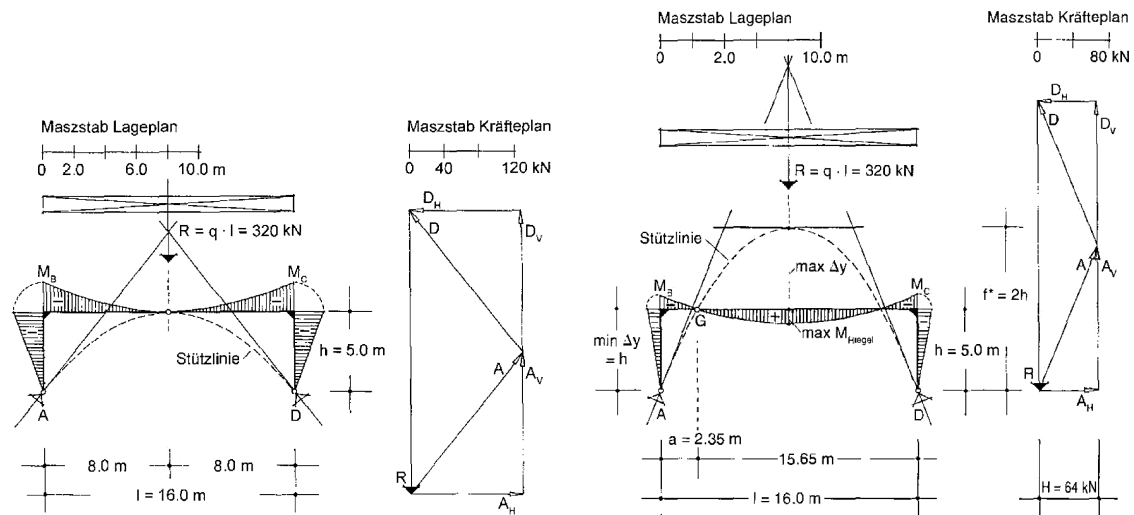


Figura 1.7-22. Comparación de los diagramas de momentos flectores de [Gerhardt 2002/a]. (Imágenes tomadas de [Gerhardt et al. 2003, 1001]).

Esta técnica para el análisis y la optimización de sistemas estructurales, de acuerdo al principio de la línea de empujes utilizando métodos gráficos, son posibles con procedimientos sencillos, que permiten definir con cierta precisión la zona donde coinciden, a pesar de tratarse de un sistema estáticamente indeterminado, las curvas del diagrama de momentos flectores con las líneas de presiones, a la vez que es posible calcular el momento flector de cada punto a partir de la distancia entre la estructura y el antifunicular ^{[111][112][113]}.

Por lo tanto, de lo expuesto, es factible extrapolar que la Estática Gráfica es también una herramienta de sumo interés para el análisis de edificios de fábrica, con dos claros objetivos como expone Huerta ^[114]:

- Entender cómo se comporta la estructura.
- Comprender el origen y significado de las grietas, si éstas son visibles.

A finales del siglo XIX se realizaron distintos estudios estructurales de edificios de grandes dimensiones conformados por elementos esbeltos, como son las construcciones góticas, para entender su comportamiento estructural. Según indica Huerta ^[114] “el desarrollo de la Estática Gráfica permitió, entonces, una buena comprensión de las condiciones de equilibrio y facilitó el análisis”.

En este sentido destacar que uno de los estudios más claro y sistemático, acerca de las monumentales construcciones góticas mediante el uso de métodos gráficos, es la obra de Ungewitter ^[115]. En la figura 1.7-23a, correspondiente a la lámina 41 de dicha obra, se aprecia el estudio de arbotantes realizado por Ungewitter. En este contexto, es oportuno mencionar otros estudios como el de Benouville ^[116] acerca de la catedral de Beauvais o el análisis de acuerdo al estudio grafostático de **Joan**

^[111] Führer, W.; Ingendaaij, S.; Stein, F. (1995). *Der Entwurf von Tragwerken*, pp. 201-206.

^[112] Gerhardt, R. (2002/b). *Reflections on the application of graphical methods to static problems*, pp. 381-383.

^[113] Gerhardt, R.; Kurrer, K-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 1002.

^[114] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 86.

^[115] Ungewitter, G. (1890). *Lehrbuch der gotischen Konstruktionen*.

^[116] Benouville, L. (1891). *Étude sur la Cathédrale de Beauvais*.

Rubió Bellver (1870-1952) realizado en 1912 ^[117], para determinar el equilibrio de Catedral de Mallorca, como se infiere de la figura 1.7-23b, una de las de mayor magnitud de la arquitectura gótica (nave central de 20 metros de luz y 42 metros de altura) ^[118].

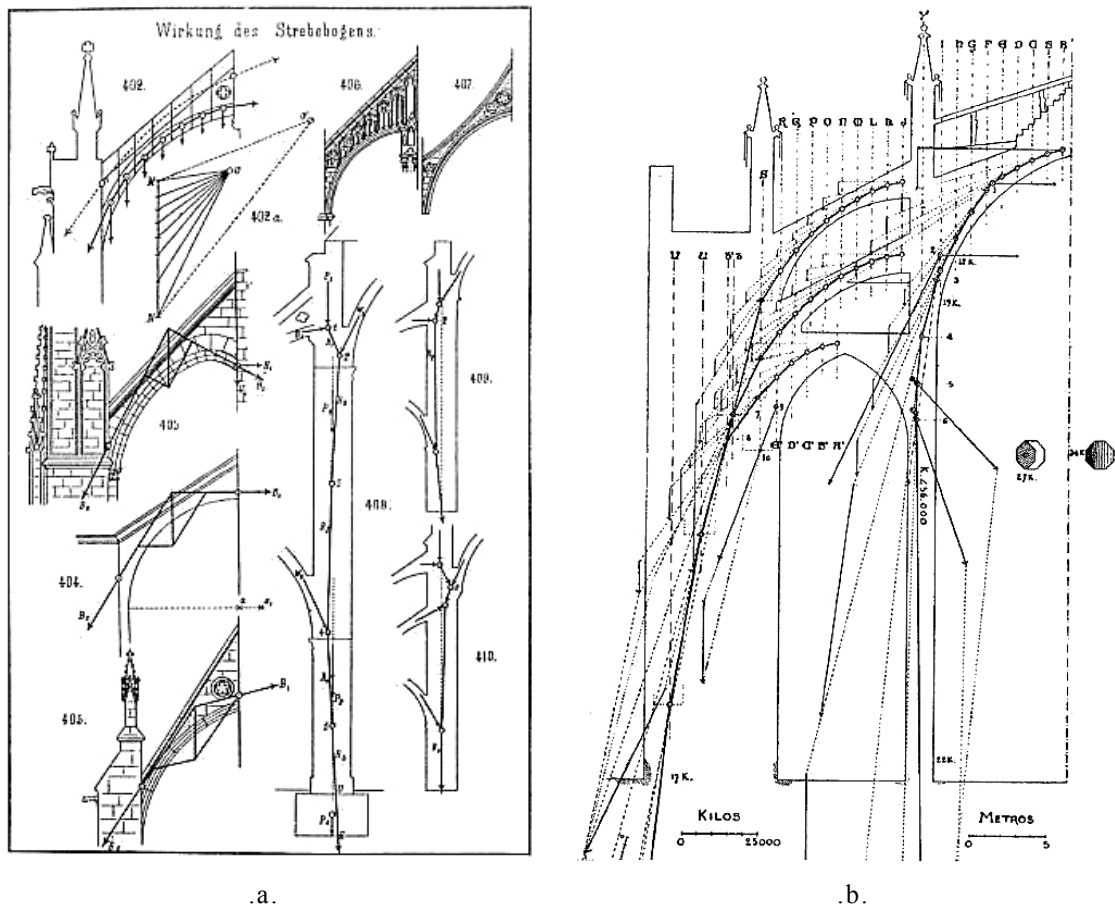


Figura 1.7-23. a) Lámina 41 de [Ungewitter 1890]: arbotantes, b) Análisis del equilibrio de la Catedral de Palma de Mallorca según [Rubió Bellver 1912]. (Imágenes tomadas de [Heyman 1995/b, 14] y [Huerta 2001, 65] respectivamente).

En este contexto, es de destacar que una de las aplicaciones más directas y prácticas mediante el uso de métodos grafostáticos es la de realizar modelos demostrativos para estudiar el comportamiento estructural de un sistema. La correspondiente relación de la forma estructural con las tensiones resultantes, inevitablemente implica que ambos, grafostática y modelos, tengan cualidades estructurales y estéticas formales. En este sentido, destacar el trabajo de Rubió Bellver de acuerdo a los métodos gráficos. Rubió Bellver fue el primer colaborador de **Antoni Gaudí Cornet** (1852-1926), desarrollando tareas desde una vertiente técnica en base a su formación con el cálculo gráfico y funicular ^[119]. Un claro ejemplo de la utilidad del diagrama de fuerzas para comprender el comportamiento estructural, es el ejemplo del estudio de los muros de contención que Gaudí proyecta para el Parc Güell y la Cripta de la Colonia Güell, y que Rubió Bellver analiza con el diagrama de fuerzas, como se desprende de la figura 1.7-24. Con el diagrama de fuerzas, se

^[117] Rubió Bellver, J. (1912). *Conferencia acerca de los conceptos orgánicos, mecánicos y constructivos de la Catedral de Mallorca*.

^[118] Huerta Fernández, S. (2005). *Mecánica de las bóvedas de fábrica: El enfoque del equilibrio*, p. 86.

^[119] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 213.

demuestra la intención de Gaudí para determinar la forma más eficaz para los muros de contención, como indican Gerhardt; Kurrer y Pichler ^[120].

Gaudí tenía en cuenta el empuje del terreno al proyectar sus porches semienterrados. En el Parc Güell y en la Cripta de la Colonia Güell se pueden encontrar bastantes ejemplos al respecto. La forma inclinada de las columnas es fruto de la consideración de los efectos de este empuje, según expone Brufau ^[121].

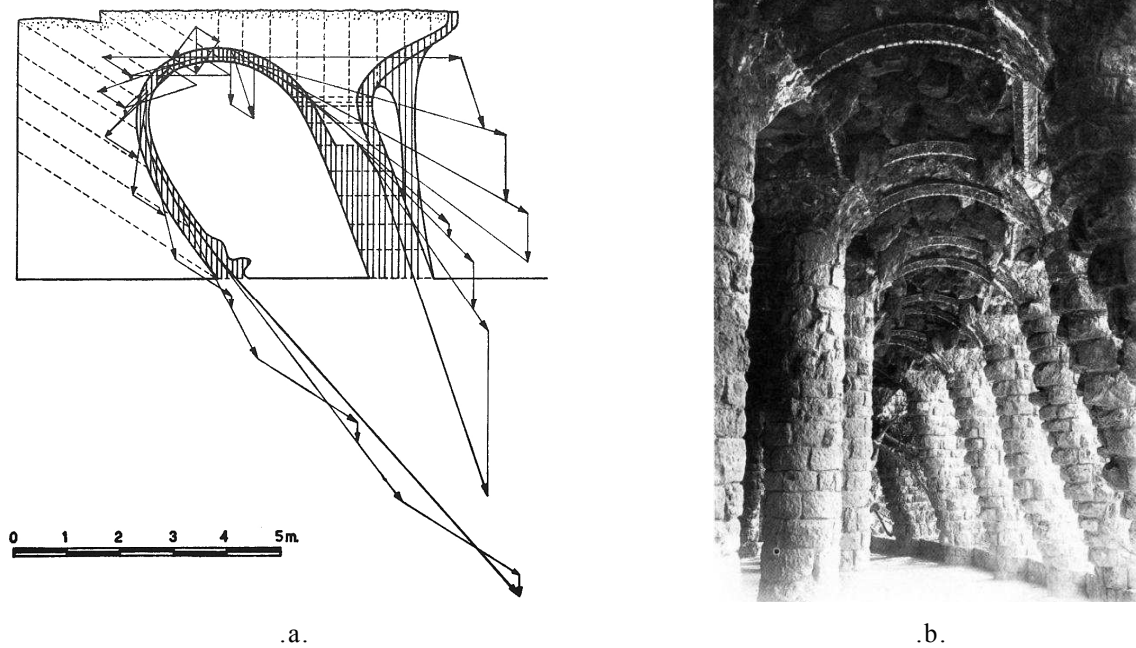


Figura 1.7-24. a) Diagrama de fuerzas de [Rubió Bellver 1913] para el análisis del comportamiento estructural de los muros de contención del Parc Güell, b) Imagen de los muros de contención del Parc Güell, foto de la Catedral Gaudí. (Imágenes tomadas de [Conrad et al. 1992, 120] y [Bassegoda Nonell 1990, 12] respectivamente).

De acuerdo a los estudios presentados por Rubió Bellver acerca de la Catedral de Palma de Mallorca, y del Parc Güell, se reitera el uso de los métodos gráficos para analizar arcos, bóvedas y cúpulas determinando, así, su equilibrio estático. Estas herramientas en base a la geometría, fueron ampliamente utilizadas por distintos arquitectos e ingenieros de finales del siglo XIX y principios del siglo XX, como fueron Henry Turner Eddy (1844-1921), August Föppl (1854-1924), Karl Mohrmann (1857-1927), y el ya referido Emil Winkler ^[122], entre otros.

Sin duda, la Estática Gráfica es un procedimiento que ha permitido resolver de una forma sencilla y eficiente distintos problemas con un grado de exactitud limitado. Si se utilizan herramientas CAD, éste método permite resolver estructuras isostáticas, con algunas ventajas respecto a los métodos analíticos de ecuaciones de equilibrio, ya que es más rápido e intuitivo. De forma que los métodos gráficos se convierten en una herramienta de utilidad en el presente y el futuro, lo cual permite proponer geometrías desde la forma y las dimensiones, y no desde una vertiente fundamentalmente matemática ^[123].

^[120] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 1003.

^[121] Brufau Niubó, R. (1998/99). *Introducció a les estructures. Les funcions de l'estructura*, p. 24.

^[122] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 326.

^[123] Serrallonga Gasch, J.; Brufau Niubó, R. (2005). *Estática Gráfica*, p. 7.

Una de las aplicaciones más recientes de los métodos gráficos mediante el uso de los ordenadores es el análisis gráfico realizado por Pichler, Eisenloffel y Ludwig [124] para establecer las causas de las grietas aparecidas en la obra de fábrica enyesada que conforman la amplia bóveda de crucería del Ayuntamiento de Berlín, *Rotes Rathaus*, la cual se muestra en la figura 1.7-25. Para determinar el diagrama de fuerzas y la línea de empujes de la solución gráfica se utilizaron herramientas CAD [125][126].

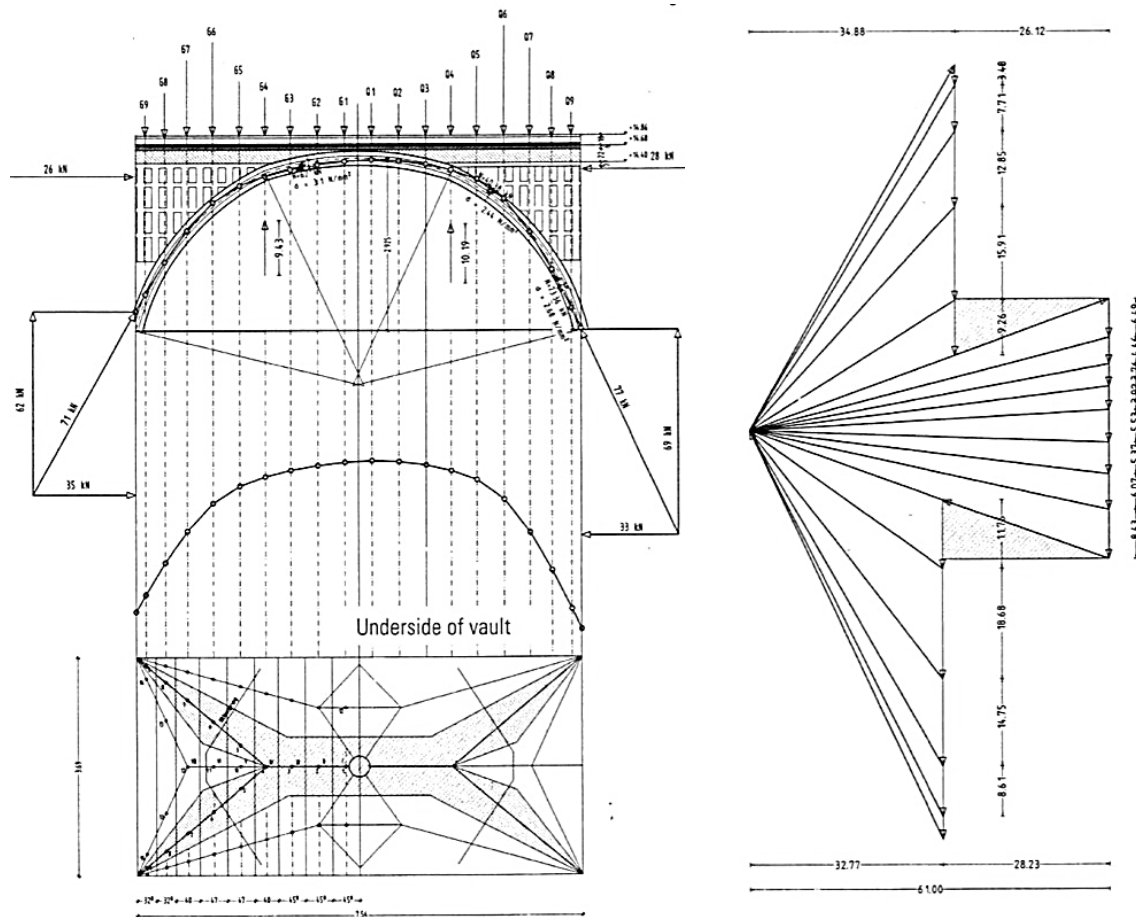


Figura 1.7-25. Análisis grafostático de la bóveda de crucería del Ayuntamiento de Berlín. (Imagen tomada de [Kurrer 2008, 706]).

La relevancia de las técnicas que conforman la Estática Gráfica reside en que se convierten en una herramienta que permite optimizar estructuras desde el diseño y, en definitiva, en base a la forma resistente. La definición de los ejes estructurales más adecuados, mediante métodos gráficos, para obtener **estructuras resistentes por su forma** (principalmente a esfuerzos axiales), dio paso a la identificación, por parte de Culmann, de las **líneas isostáticas de acuerdo a las direcciones de las tensiones principales** y, que posteriormente desarrolló Mohr, como se trata a continuación.

[124] Pichler, G.; Eisenloffel, K.; Ludwig, M. (1998). *Die graphische Statik in Studium und Praxis*.

[125] Gerhardt, R.; Kurrer, K.-E.; Pichler, G. (2003). *The methods of graphical statics and their relation to the structural form*, p. 1004.

[126] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 705.

1.8 Las tensiones principales y las líneas isostáticas

De acuerdo a lo expuesto anteriormente en el apartado 1.4, **Augustin Louis Cauchy** (1789-1857) en base a sus conocimientos sobre hidrodinámica, los cuales le permitieron realizar estudios de presión sobre un plano, definió por primera vez en la Teoría de la Elasticidad el concepto formal de «tensión». Posteriormente Cauchy introdujo el tensor de tensiones ^[1], y el tensor de deformaciones ^[2].

Cauchy realizó también estudios en elementos infinitesimales de un plano de un cuerpo elástico que se deforma, de acuerdo a las tres componentes de tensión (σ_x , σ_y , τ) respecto al plano perpendicular a la directriz del plano paralelo a ella. Para un plano inclinado estableció los ejes principales de esta superficie, a los cuales denominó «direcciones principales», correspondientes a las determinantes «tensiones principales», para conocer el comportamiento resistente de la pieza ^[3]. Esta temática es fundamental en el desarrollo de este trabajo de investigación en base al estudio de las direcciones principales y, en definitiva, de acuerdo a las líneas isostáticas.

1.8.1 Direcciones de las tensiones principales

Las tensiones principales para cada punto, en base a un determinado estado de cargas de la pieza, corresponden a los valores extremos de tracción y de compresión, o una combinación de ellos. Dichas tensiones normales se producen en dos planos principales que son perpendiculares entre sí, conteniendo el punto analizado, donde la tensión de corte es nula. Las direcciones de las tensiones máximas son las direcciones principales ^[4] del punto para esta sollicitación y, de igual forma que las tensiones, dichas direcciones son perpendiculares entre sí, como se muestra en la figura 1.8-1, para un estado plano de tensiones derivado de uno de cortadura pura.

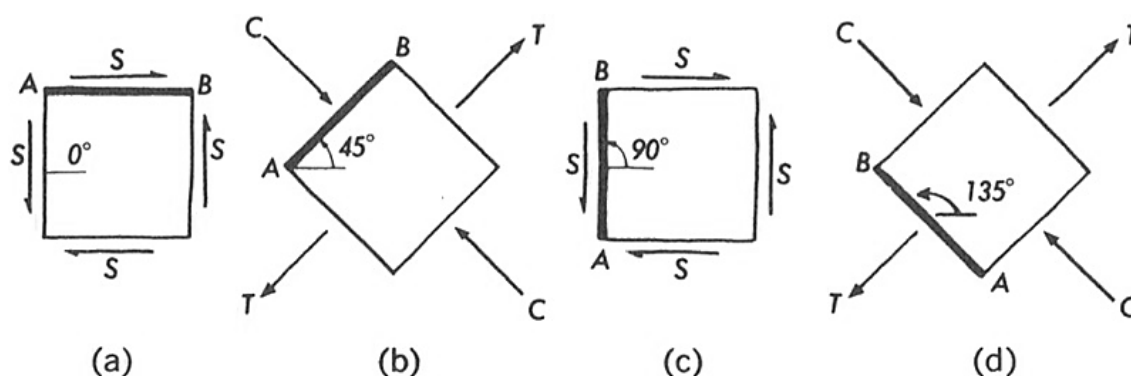


Figura 1.8-1. Variación de la tensión según la orientación del elemento estructural. (Imagen tomada de [Salvadori et al. 1998, 131]).

Así, en el análisis tensional plano, de interés para esta Tesis, si orientamos las caras de un paralelepípedo diferencial de un elemento estructural o pieza cargada, de forma que las tensiones de cortadura sean nulas, existen dos direcciones perpendiculares entre sí donde solo hay tensiones normales (σ_1 y σ_2), donde: $\sigma_1 > \sigma_2$, cuyos valores se establecen de acuerdo a las siguientes expresiones:

[1] Cauchy, A.L. (1827/a). *De la pression ou tension dans un corps solide*.

[2] Cauchy, A.L. (1827/b). *Sur la condensation et dilation des corps solides*.

[3] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 108 y 109.

[4] Salvadori, M.; Heller, R. (1998). *Estructuras para Arquitectos*, p. 132.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.8.1)$$

Si bien, para una visión más completa, conviene una generalización sucinta del estado tensional como a continuación se presenta. En este contexto, las direcciones principales en un punto de una pieza cargada serán las direcciones a las cuales es necesario orientar el paralelepípedo diferencial alrededor de este punto, de manera que las tensiones tangenciales sean nulas en todas las caras de éste. Las tensiones principales serán las tensiones normales en las direcciones principales. De los valores de esas tensiones depende que el cuerpo pueda resistir, o no, ese estado tensional ^[5]. Dado que las tensiones principales se definen cuando la tensión tangencial es nula, la matriz asociada al estado tensional referido a las direcciones principales será de acuerdo al siguiente tensor de tensiones:

$$|T|_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_{xo} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yo} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zo} \end{bmatrix}$$

Como se desprende de la figura 1.8-2, para cualquier estado de tensiones a medida que el elemento solicitado gira, las tensiones normales varían de un valor máximo a un valor mínimo, siendo las tensiones extremas perpendiculares entre sí, y la tensión tangencial es nula cuando las tensiones normales son la máxima y la mínima. Para el resto de direcciones, habrá tensiones normales y tangenciales simultáneamente.

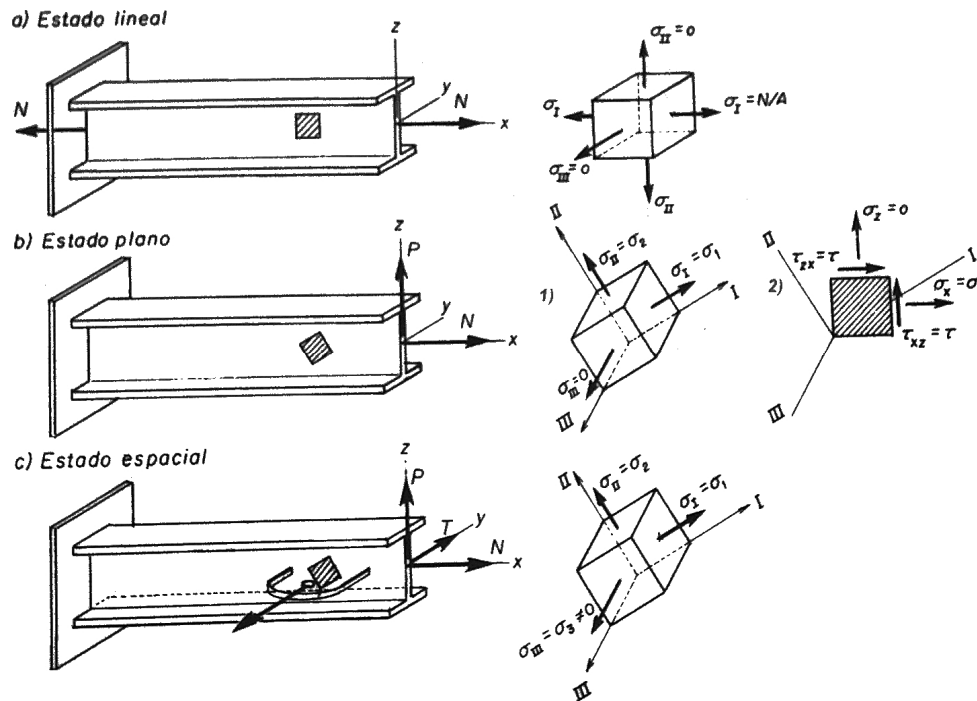


Figura 1.8-2. Posibles estados tensionales. (Imagen tomada de [Argüelles Álvarez et al. 2005, 1.18]).

[5] Torroja Miret, E. (1957). *Razón y ser de los tipos estructurales*. Reimpreso en 2010 (3ª Edición), p. 26.

Por lo tanto, si se considera un sólido en equilibrio en carga, se puede tener según el estado de cargas exteriores y la orientación del cubo elemental un estado tensional simple, doble o triple de tensiones, como se infiere de la figura 1.8-3. En la figura 1.8-3c, las tensiones tangenciales que se producen en dos planos ortogonales son iguales en módulo, y tienen sentidos tales que ambas concurren o se alejan a la vez de la arista de acuerdo al teorema de reciprocidad de Cauchy.

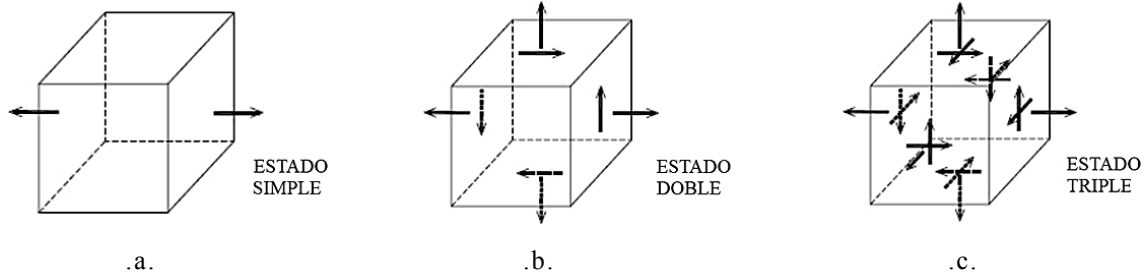


Figura 1.8-3. Posibles estados tensionales según el estado de cargas y la orientación del cubo elemental. (Imagen propia).

Cauchy consideró un elemento tetraédrico, como se muestra en la figura 1.8-4, para definir, así, las tres componentes de tensión de un plano inclinado abc , X_n , Y_n , Z_n , de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ Y_n &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \\ Z_n &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \quad (1.8.2)$$

donde,

l , m , n , son los respectivos cosenos de los ángulos que forman los ejes de coordenadas con la normal exterior del plano abc .

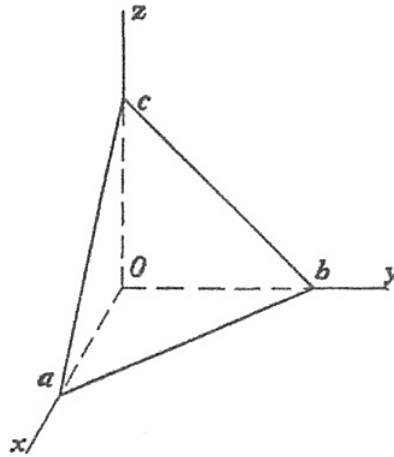


Figura 1.8-4. Plano inclinado correspondiente a un elemento tetraédrico. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 109]).

De esta manera, los valores de las tensiones también se pueden representar de acuerdo al tensor de tensiones de Cauchy, para pequeñas deformaciones, que viene dado por la siguiente matriz simétrica, para determinar matemáticamente el comportamiento tensional, el cual se expresa matricialmente en la figura 1.8-5.

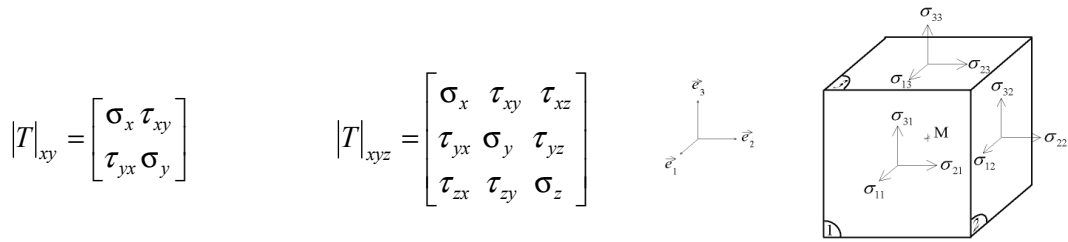


Figura 1.8-5. Tensor de tensiones simétrico de 2x2 y 3x3 y representación del cubo elemental, en el caso tensional triple. (Imagen propia donde $i, j, k \equiv x, y, z$ ($i, j, k \equiv 1, 2, 3$)).

Así mismo, las correspondientes deformaciones se pueden describir según el tensor de deformaciones, de acuerdo al tensor de tensiones previamente definido.

$$|\varepsilon|_{xyz} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

De la misma forma, para un volumen de un cuerpo cargado habrá tensiones normales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$), en las direcciones principales que se producen al cambiar la orientación del plano en dicho punto, donde dichas tensiones están ordenadas matemáticamente de mayor a menor.

Como se ha tratado anteriormente, la principal aportación del avanzado **Karl Culmann** (1821-1881) fue introducir los métodos gráficos ^[6] para el análisis y la resolución de distintos tipos de estructuras, en base a la geometría proyectiva y al polígono funicular, inspirado en la obra de **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), para resolver los más diversos problemas de la Estática. Ello le permitió determinar las reacciones en los apoyos de una viga, así como, el diagrama de momentos flectores o la posición más desfavorable de una carga móvil. Así mismo, podía calcular el centroide de una figura plana o el momento de inercia con respecto a un eje, a la vez que definir las direcciones de los ejes principales de una figura ^[7].

Culmann calcula gráficamente las tensiones en un punto A de una viga biapoyada en los extremos y sometida a una carga puntual en el centro de la viga, considerando un elemento infinitesimal Amn , como se aprecia en la figura 1.8-6a. En base al plano mn , que pasa a través del punto A , determina las tensiones que actúan sobre dicho plano, las cuales vienen dadas por las coordenadas de los puntos del «círculo de tensiones» de Culmann ^[6], como se muestra en la figura 1.8-6b.

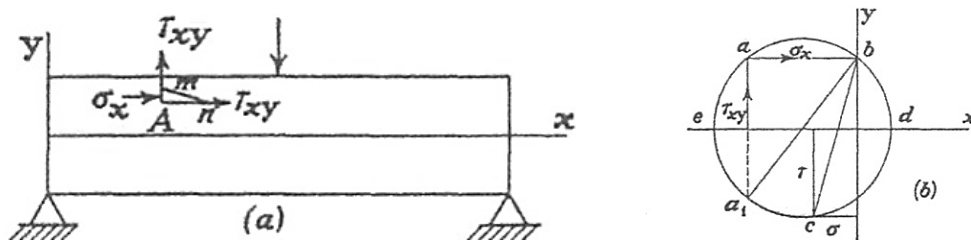


Figura 1.8-6. Estudio tensional en el punto A de una viga biapoyada para carga puntual en el centro. (Imagen tomada de [Timoshenko 1953, 1983, 195]).

[6] Culmann, K. (1864/1866). *Die Graphische Statik*.

[7] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, pp. 194 y 195.

El círculo para el análisis de tensiones de Culmann es un caso particular que precede a los «círculos de Mohr»^[8]. Atendiendo a Timoshenko^[9], la aportación de Culmann influyó de forma considerable en los ingenieros que le sucedieron, entre los cuales, destacan **Maurice Koechlin** (1856-1946) y **Christian Otto Mohr** (1835-1918). El estudio de la viga realizado por Culmann le permite definir la trayectoria de tensiones principales de una viga en voladizo, como se desprende de la figura 1.8-7.

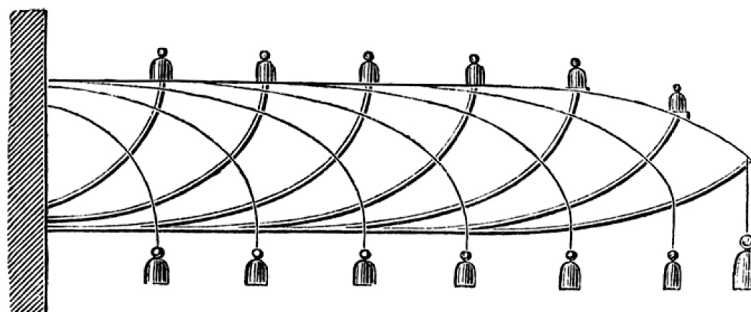


Figura 1.8-7. Viga corta en voladizo con las trayectorias de las tensiones principales según [Culmann 1866] presentado en [Wolff 1870, 1892]. (Imagen tomada de [Skedros et al. 2007, 17]).

1.8.2 Las líneas isostáticas

Como se ha expuesto anteriormente, Mohr es uno de los máximos exponentes, junto con Culmann, de la Estática Gráfica, así como de las tensiones combinadas y los círculos de tensiones. Derivado de la teoría del círculo de Mohr, se definen las direcciones principales de cada punto de una estructura de acuerdo a un determinado estado de solicitaciones y, por lo tanto, permite definir la trayectoria de líneas isostáticas de dicho elemento resistente.

Las **líneas isostáticas** de un elemento resistente o pieza, también conocidas como líneas de tensión o trayectorias de tensión, remitiéndonos al estado plano, son las envolventes de las direcciones principales de todos sus puntos, por lo tanto, definen la trayectoria de las direcciones de las tensiones principales para todos los puntos de una estructura^[10]. Es por ello por lo que, las líneas isostáticas son las curvas cuya tangente para un punto cualquiera proporciona la dirección de una de las tensiones principales en ese punto, permitiendo la representación del fenómeno tensional del elemento resistente como indica Eduardo Torroja Miret:

“Las envolventes de estas direcciones forman, en general, la red de las llamadas líneas isostáticas que permite una buena representación del fenómeno tensional; y esta representación puede hacerse algo más intuitiva imaginando que, a lo largo de cualquiera de esas líneas, el sólido se acorta o se alarga proporcionalmente a la tensión (tracción o compresión por unidad de superficie) correspondiente. Ciertamente la influencia del coeficiente de Poisson hace que esta deformación dependa también de las otras dos tensiones principales; pero, ello no tiene demasiada importancia para un primer enjuiciamiento aproximado, no es tampoco difícil de tener en cuenta.”

[Torroja Miret 1957, 2010, 26].

[8] Guerra Fontana, R. (s.f/a). *Tensiones y deformaciones*, p. 6.113.

[9] Timoshenko, S.P. (1953). *History of strength of materials*. Reimpreso en 1983, p. 195.

[10] Brufau Niubó, R. (1988). *Análisis crítico y propuesta de un método de estudio de vigas de hormigón armado, con especial atención a su comportamiento ante solicitaciones de corte, para cualquier configuración de su armadura, de su forma y de sus condiciones de enlace*, p. 41.

Como se infiere de la figura 1.8-8, para representar las líneas isostáticas, es suficiente con definir en cada punto las direcciones de las tensiones principales utilizando, por ejemplo, los círculos de Mohr correspondientes y trazar mediante procedimientos gráficos la envolvente de las direcciones principales del elemento estructural analizado.

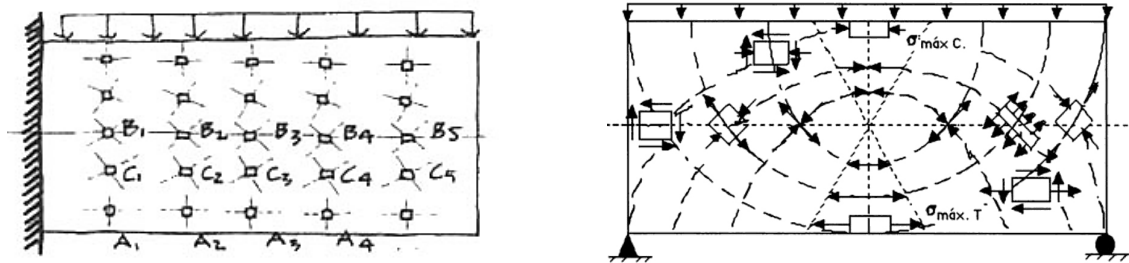


Figura 1.8-8. Trayectoria de las tensiones principales para el caso de una viga en voladizo y una viga apoyada en sus extremos, ambas sometidas a una carga uniformemente distribuida. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 1997/98, 16.17] y [Pérez White et al. 1970, 67] respectivamente).

Como indica Brufau ^[11], al ser por definición las dos direcciones principales de cada punto perpendiculares entre sí, las líneas isostáticas siempre definirán dos familias de líneas ortogonales. De hecho, se comprueba la perpendicularidad de las dos familias de isostáticas para cada punto cuando el producto de sus pendientes, de la isostática, tiene como valor opuesto el de la unidad.

La relevancia de las líneas isostáticas reside en que permiten observar cómo se canalizan las tensiones principales en cada punto de un elemento estructural de acuerdo a las fuerzas exteriores actuantes y según las condiciones de equilibrio de dicho elemento resistente, como se infiere de las figuras 1.8-9 y 1.8-10.

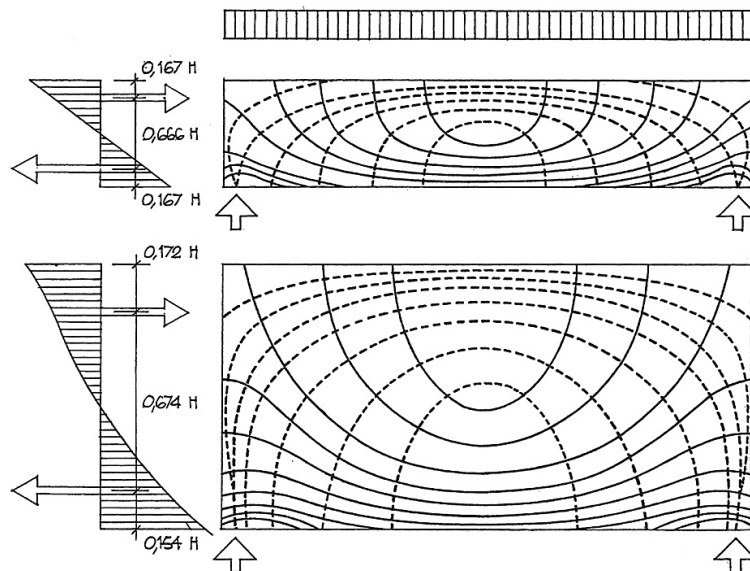


Figura 1.8-9. Representación de las líneas isostáticas de acuerdo a la transición de una jácena a una jácena de gran canto ($H = 1/2L$ o separación entre apoyos). En línea continua se muestran las líneas isostáticas de tracción y en línea discontinua las líneas isostáticas de compresión. (Imagen tomada de [Engel 2001, 217]).

^[11] Brufau Niubó, R. (1997/98). *Estructuras III. Comportament resistant*, p. 16.17.

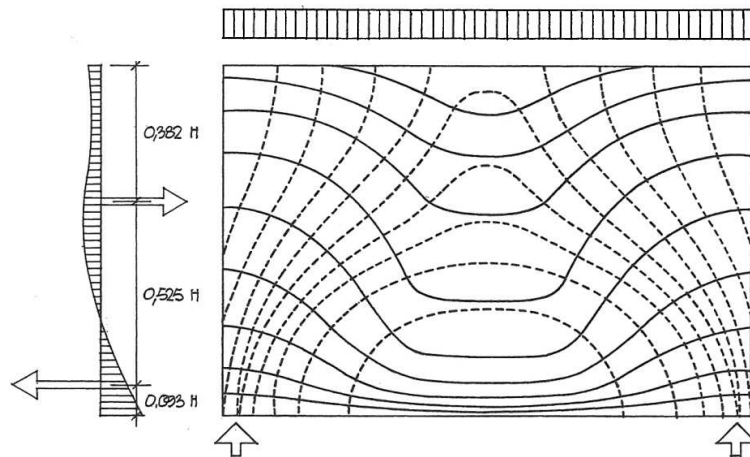


Figura 1.8-10. Distribución de las líneas isostáticas en lámina portante bajo la acción de cargas gravitatorias. En línea continua se muestran las líneas isostáticas de tracción y en línea discontinua las líneas isostáticas de compresión. (Imagen tomada de [Engel 2001, 217]).

Si en lugar de representar gráficamente las direcciones principales, se representa la magnitud de las tensiones en cada punto se obtienen las **líneas isóbaras**. Mientras que si se unen los puntos sucesivos en los cuales las tensiones principales tienen la misma dirección, se definen las **líneas isoclinas** ^[12]. La relación entre las isoclinas con las líneas isostáticas es que correlativamente sus ecuaciones diferenciales son inversamente opuestas, es decir, trayectorias ortogonales.

La representación de las líneas isostáticas permite comprender el comportamiento estructural de un elemento resistente para un determinado estado de cargas y condiciones de equilibrio. En la figura 1.8-11, se muestran los flujos axiales de la fachada de la torre Agbar analizada por BOMA.

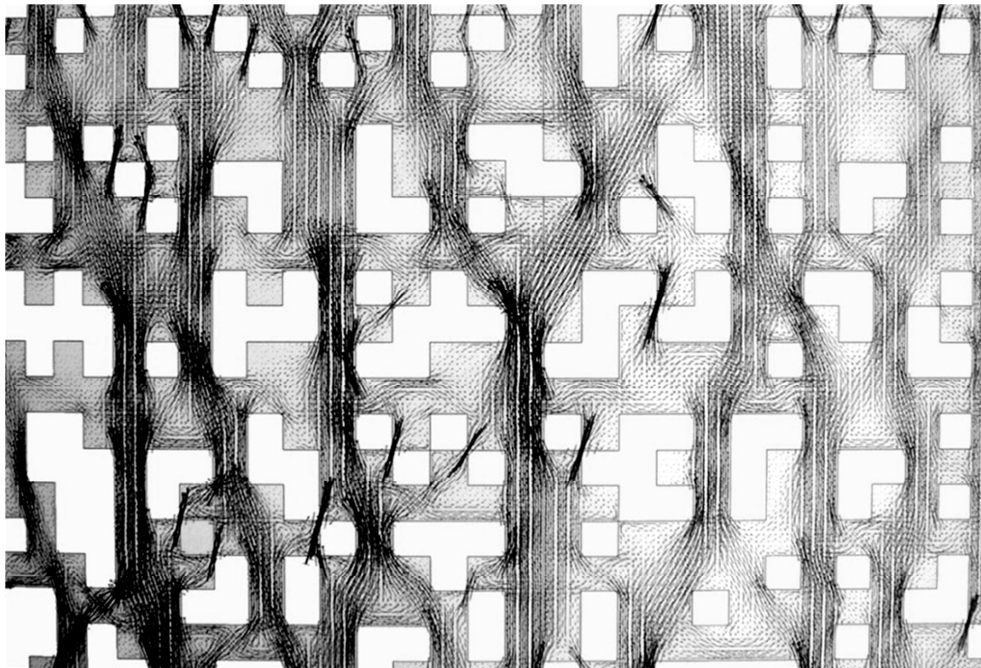


Figura 1.8-11. Flujos axiales en fachada Torre Agbar analizada por BOMA con el programa GID. (Imagen tomada de [Aguiló Alonso 2008/a, 172]).

[12] Brufau Niubó, R. (1997/98). *Estructures III. Comportament resistent*, p. 16.27.

1.8.3 Teoría del círculo de Mohr

La formulación (expresiones (1.8.1)) para determinar los esfuerzos principales de los distintos puntos de un sólido sometido a acciones exteriores permite un elegante análisis geométrico que Mohr desarrolló, en 1882: **el método gráfico del círculo de Mohr**. Cabe destacar que el método gráfico que representa el análisis precedente de esfuerzo plano, desarrollado por Mohr, fue descubierto y publicado por primera vez por el ingeniero alemán Culmann en su obra acerca de la Estática Gráfica ^[13]. El círculo de Mohr es un método gráfico que permite determinar el estado tensional de los distintos puntos de un cuerpo sometido a un determinado estado de cargas. El método consiste en representar el estado plano completo de esfuerzo mediante la representación de un círculo en el plano $\sigma\tau$.

Dadas las propiedades del círculo de Mohr se convierte en un método gráfico para determinar el estado tensional en dos o tres dimensiones de los distintos puntos de un sólido, adaptándolo a las características de un círculo, en el estado plano (y a un tricírculo en el estado triple de tensiones), con centro c del círculo de Mohr en $(\sigma_{\text{media}}, 0)$ y radio r , que en el estado xy responde a:

$$c = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}, 0 \right) \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \tau_{\max} \quad (1.8.3)$$

Dado que el círculo de Mohr permite representar gráficamente un tensor simétrico, ya sea de 2×2 o de 3×3 , es posible determinar deformaciones, así como, calcular el esfuerzo cortante máximo absoluto y la deformación máxima absoluta. Como se desprende de Antico y Pezzotti ^[14], la importancia reside en la obtención de las tensiones principales, para determinados planos del cuerpo como se aprecia en la figura 1.8-12 y exponen consecuentemente:

“De todas las tensiones que hay en un sólido sometido a ciertas sollicitaciones y con unas determinadas restricciones, son de mayor importancia, las tensiones principales que existen para ciertos planos del cuerpo, donde las tensiones de corte son nulas. Este método será de aplicación tanto para estados tensionales en dos y tres dimensiones.”

[Antico et al. 2008, 1].

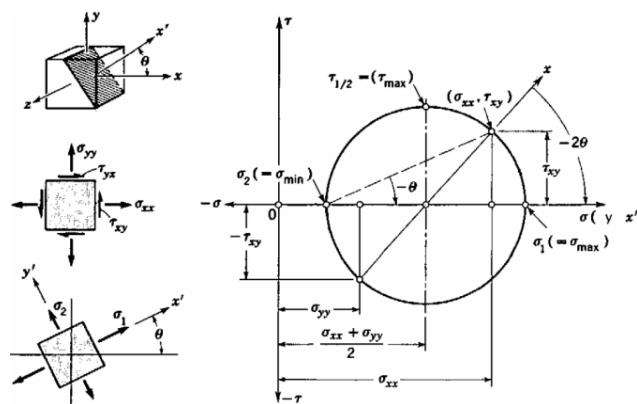


Figura 1.8-12. Círculo de Mohr para esfuerzo plano (para “cortes” paralelos al eje z). (Imagen tomada de [Antico et al. 2008, 1]).

[13] Culmann, K. (1864/1866). *Die Graphische Statik*.

[14] Antico, F.; Pezzotti, S. (2008). *Círculo de Mohr para el cálculo de tensiones principales en el plan y el espacio*.

La aplicación de los círculos de Mohr permite definir con claridad el trazado de las direcciones principales y, en definitiva, líneas isostáticas de un elemento estructural. Para ello, es necesario realizar el círculo de Mohr en tantos puntos como sea necesario y secciones como convenga ^[15]. En la figura 1.8-13, se muestran las líneas isostáticas de tres piezas de geometría sencilla (viga en voladizo, viga biapoyada y viga biempotrada), sometidas a estados de cargas convencionales.

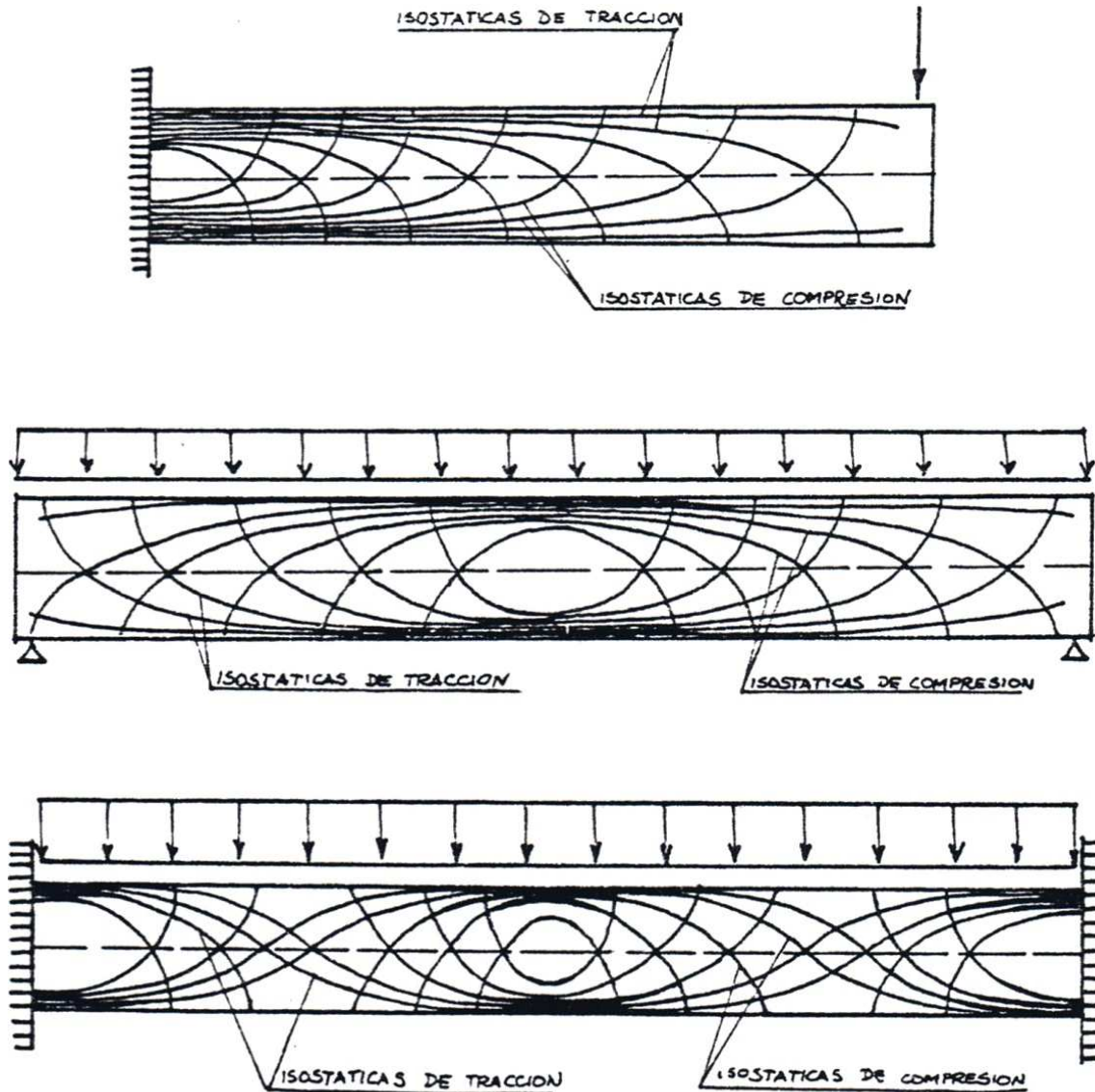
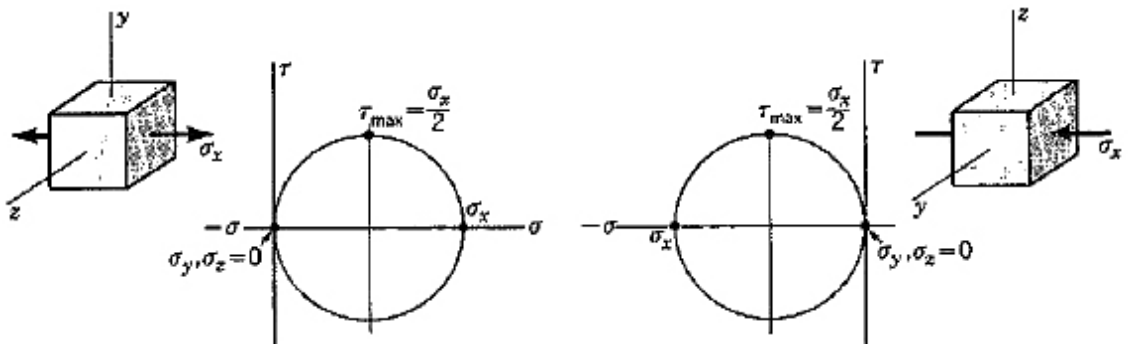


Figura 1.8-13. Líneas isostáticas: a) Viga en voladizo, sometida a carga puntual, b) viga biapoyada, sometida a carga repartida, c) Viga biempotrada, sometida a carga repartida. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 1988, 43]).

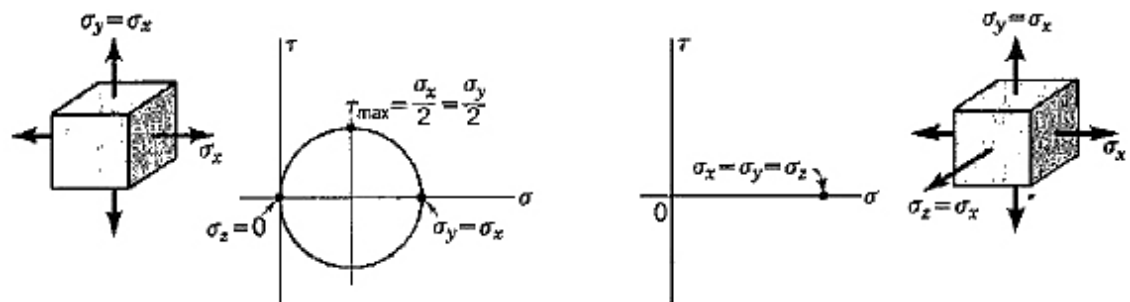
^[15] Brufau Niubó, R. (1988). *Análisis crítico y propuesta de un método de estudio de vigas de hormigón armado, con especial atención a su comportamiento ante solicitaciones de corte, para cualquier configuración de su armadura, de su forma y de sus condiciones de enlace*, p. 41.

En la figura 1.8-14, se muestran algunos de los estados tensionales, genéricos, y su representación gráfica mediante los círculos de Mohr.



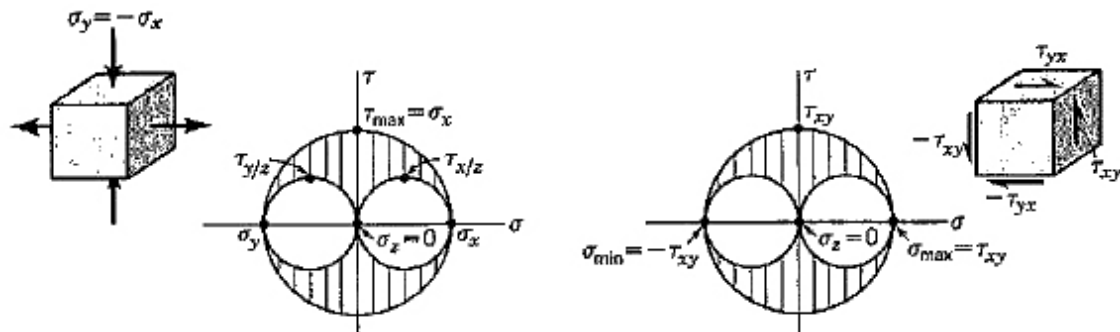
a) Tracción pura ($\sigma_1 = \sigma_x$)

b) Compresión pura ($\sigma_1 = -\sigma_x$)



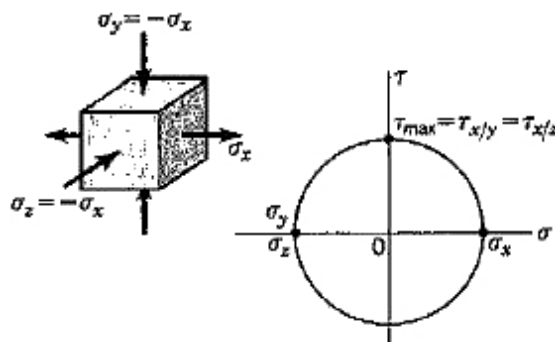
c) Tracción biaxial igual ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_y$)

d) Tracción triaxial igual ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$)



e) Tracción y compresión iguales (Cortante puro $\tau_{max} = \sigma_1$)

f) Cortante puro plano ($\sigma_1 = \tau_{max}$)



g) Tracción con compresión lateral idéntica

Figura 1.8-14. Distintos estados tensionales y sus correspondientes círculos de Mohr. (Imágenes tomadas de [Antico et al. 2008, 3]).

La identificación y representación de las líneas isostáticas en base a las direcciones principales, conforme a lo previamente expuesto, se convierte en una herramienta de gran utilidad para determinar el comportamiento resistente de los distintos elementos estructurales. Es por ello por lo que el estudio de las líneas isostáticas se ha utilizado y se utiliza como criterio de diseño de los elementos resistentes, como por ejemplo, la definición del trazado más eficiente de las armaduras en hormigón armado o la disposición más eficiente de las barras en estructuras de entramado o de celosía, ya sean en dos o en tres dimensiones, de acuerdo a las cargas actuantes y a las condiciones de equilibrio. En la figura 1.8-15, se muestran las líneas isostáticas de tracción y de compresión de media viga de hormigón apoyada en los extremos, bajo la acción de cargas gravitatorias, cuyo estudio se realizó de acuerdo a los «canales» elementales que describe Bernal ^[16]:

- En la parte superior de la zona media de la viga las tensiones de compresión resultan paralelas al eje longitudinal de la viga.
- La dirección de las tensiones de compresión se inclinan, por efecto del corte. El hormigón resiste estos esfuerzos, conformando las definidas «bielas comprimidas».
- En la parte inferior de la zona media de la viga las tensiones de tracción son resistidas por la armadura.
- Las tensiones de tracción se inclinan hacia arriba, cruzándose perpendicularmente con las tensiones de compresión, como se aprecia en la figura 1.8-15.

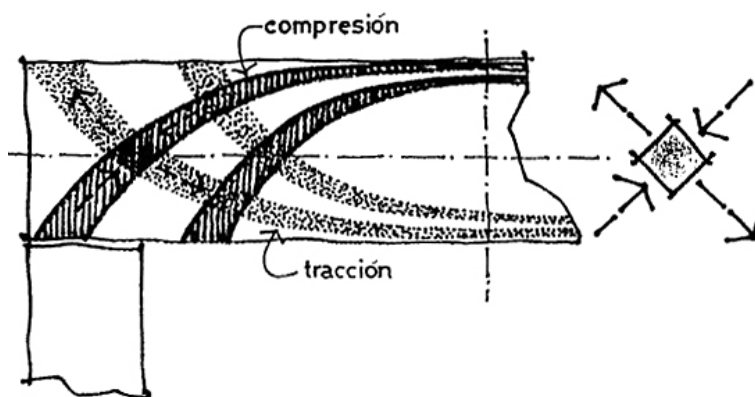


Figura 1.8-15. Líneas isostáticas de compresión y de tracción de media viga apoyada en los extremos bajo la acción de cargas gravitatorias. (Imagen tomada de [Bernal 2005, p. 138]).

En cuanto al estudio de vigas o forjados se refiere, en base a la disposición de las armaduras de refuerzo para una mayor eficiencia de éstas, cabe destacar algunos de los estudios y propuestas pioneras como fueron las de William Boutland Wilkinson (1819-1902), François Hennebique (1842-1921) o Emil Mörsch (1872-1950), basándose en la identificación de las direcciones de las tensiones principales de elementos tipo viga de alma llena, para disponer las armaduras de la forma más adecuada y eficiente posible. Otros sistemas constructivos para vigas y forjados de armados de acuerdo a las direcciones de las tensiones principales son los sistemas constructivos o patentes de Taddeus Hyatt (1878), Coularou (1897), Edmond Coignet (1892), Poutre Dalle (1902), Klett (1902) o Habrich (1903) ^{[17][18]}.

[16] Bernal, J.R. (2005). *Hormigón armado: vigas*, p. 138.

[17] <http://oliebana.com/tag/slab/>

[18] Burgos Núñez, A. (2009). *Los orígenes del hormigón armado en España*.

En la figura 1.8-16, se aprecia el sistema constructivo patentado por el fabricante de yesos **William Boutland Wilkinson** (1819-1902) en 1854, para la construcción de losas nervadas con casetones de yeso perdidos. Cabe destacar la disposición de las armaduras en forma de alambres de las losas de acuerdo a las tensiones de tracción o con mayor cantidad de armadura en las zonas de máximo momento flector, atendiendo a los principios constructivos del hormigón armado ^[19].

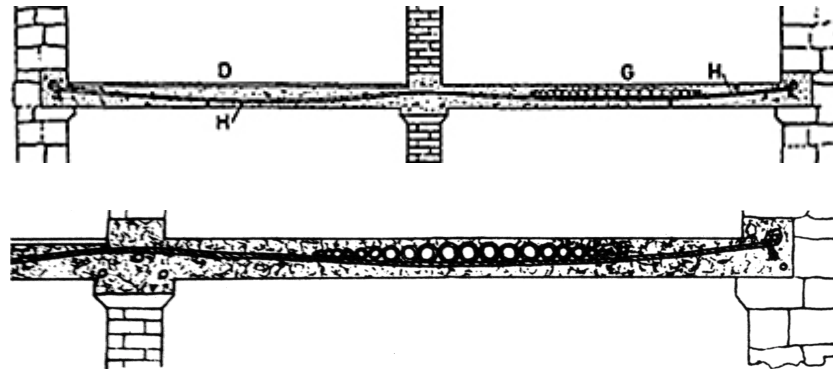


Figura 1.8-16. Construcción de pisos de losa de hormigón armado de acuerdo a las tensiones de tracción según Wilkinson. (Imagen tomada de [Ochshorn s.f.]).

Una solución constructiva parecida fue patentada por **François Hennebique** (1842-1921) en 1897, la cual se muestra en la figura 1.8-17, de acuerdo a los esfuerzos y momentos que solicitan la viga de hormigón armado, con armaduras superiores en los soportes (flexión negativa), así como un mayor número de estribos ^{[20][21]}.

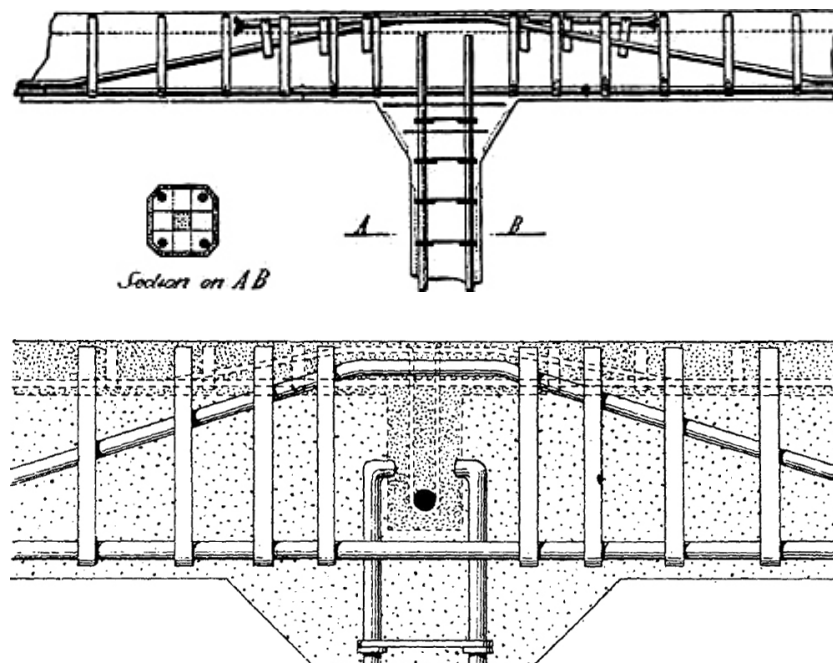


Figura 1.8-17. Armadura de una viga por el sistema de Hennebique en 1897. (Imágenes tomadas de [Wiebenson 1960, 22] y [Barberot 1927, 204] respectivamente).

^[19] Hormigón Estructural, U.D. (2005). *Notas para una historia del Hormigón Estructural*, p. 45.

^[20] Barberot, E. (1927). *Tratado práctico de edificación*.

^[21] <http://oliebana.com/tag/slab/>

Uno de los aspectos más relevantes de la aportación de Hennebique es que se le atribuye el primer modelo de entramado en celosía para plantear el comportamiento de las piezas de hormigón armado frente a los esfuerzos de cortante y los momentos de flexión ^{[22][23]}, identificando las tensiones principales mediante las geometrías equivalentes ideales de acuerdo al modelo de estructuras de entramado de celosía, como se tratará de forma más extensa en el segundo capítulo. En la figura 1.8-18, se aprecia el modelo de entramado de celosía equivalente ideal de Hennebique según **Wilhelm Ritter** (1847-1906) ^[24] para definir las bielas de la viga de hormigón.

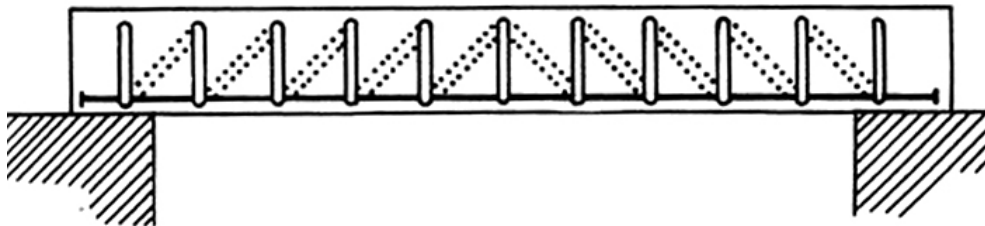


Figura 1.8-18. Modelo de bielas de Hennebique según Ritter para analogía de viga de celosía ideal equivalente. (Imagen tomada de [Kurrer 2008, 563]).

En este contexto, destacar los estudios de **Emil Mörsch** (1872-1950) para determinar la disposición de las armaduras de refuerzo de acuerdo a las direcciones de las tensiones principales identificadas por las líneas isostáticas, como se aprecia en la figura 1.8-19, así como las disposiciones más adecuadas de las armaduras mediante la representación de las líneas isostáticas como se muestra en la figura 1.8-20.

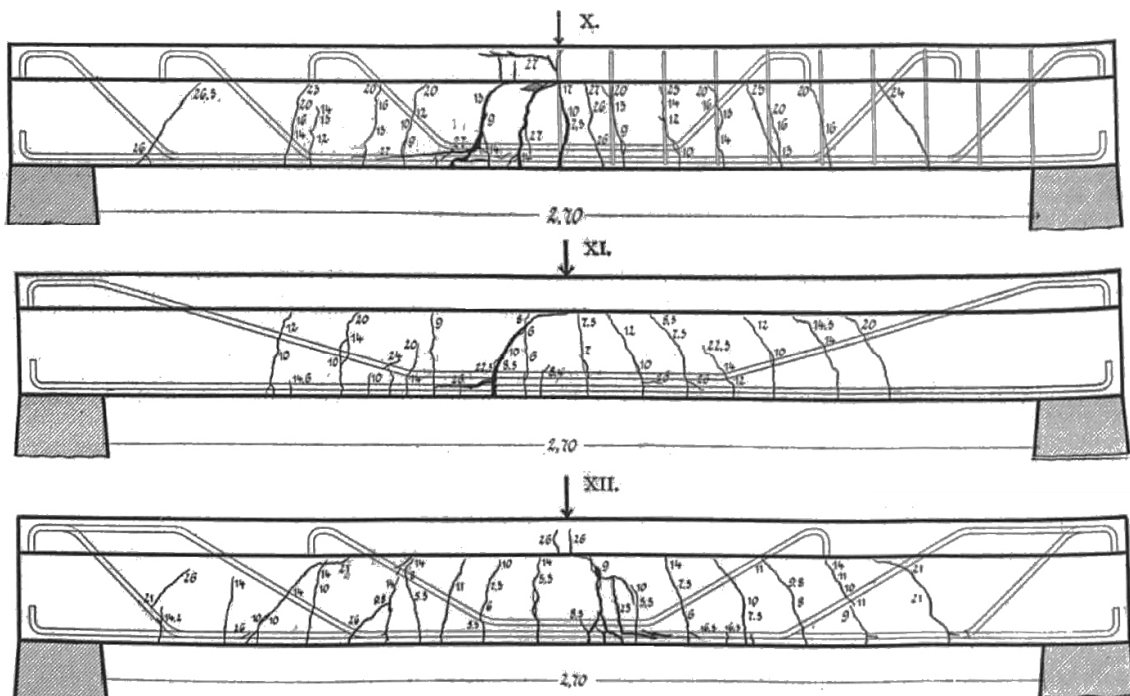
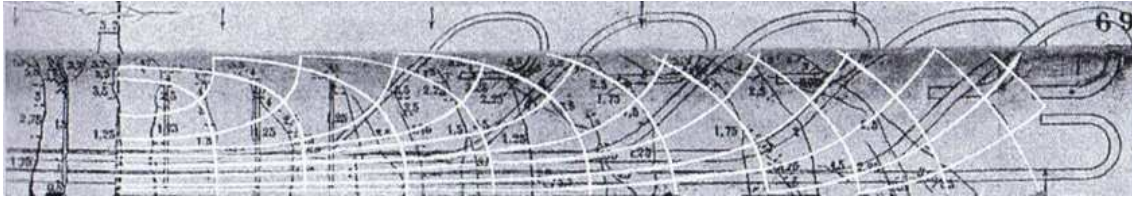


Figura 1.8-19. Distintas formaciones (X-XII) de vigas de hormigón armado. (Imágenes tomadas de [Mörsch 1907, 242]).

[22] Hormigón Estructural, U.D. (2005). *Notas para una historia del Hormigón Estructural*, p. 61.

[23] Kurrer, K.-E. (2008). *The History of the Theory of Structures: From Arch Analysis to Computational Mechanics*, p. 563.

[24] Ritter, W. (1899). *Die Bauweise Hennebique*, p. 60.



1.8.4 Estudio de las direcciones de las tensiones principales y de las líneas isostáticas en elementos estructurales tipo viga

El objeto de este apartado es identificar la trayectoria de líneas isostáticas en vigas de alma llena para, así, establecer posteriormente su relación con el rendimiento estructural de las vigas de celosía que se analizan en el apartado 2.5. Una vez realizado el estudio comparativo acerca del rendimiento estructural de las armaduras, se tratará de determinar si las celosías son más óptimas y eficientes cuando su diseño se asemeja a la trayectoria de las líneas isostáticas de los elementos estructurales equivalentes de alma llena. Para ello, en este apartado se estudian las direcciones de las tensiones principales identificadas por sus líneas isostáticas para los casos de viga apoyada en los extremos y viga en voladizo. La representación y el conocimiento de la trayectoria de las líneas isostáticas es una herramienta muy útil para el análisis de elementos estructurales tipo viga, así como, para el estudio de vigas en celosía que se aborda en el segundo capítulo del presente trabajo de investigación.

Retomando los conceptos de las tensiones principales y las líneas isostáticas, de los epígrafes 1.8.2 y 1.8.3, como se muestra en las figuras 1.8-21 y 1.8-22, en el presente apartado se analizan, mediante la modelización por elementos finitos (MEF), los elementos estructurales tipo viga anteriormente mencionados para los estados de carga correspondientes. Se obtienen los diagramas de tensiones principales, así como las direcciones principales en cada punto, necesarias para graficar, posteriormente, la trayectoria de las líneas isostáticas de dichos elementos analizados.

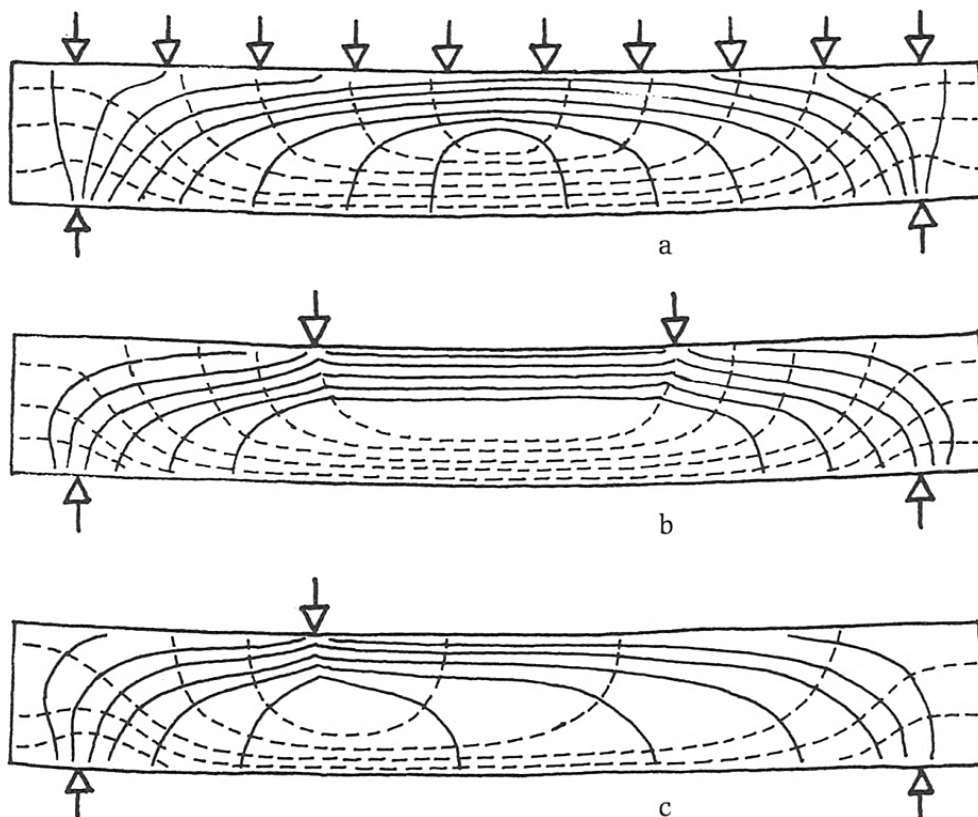


Figura 1.8-21. Líneas isostáticas de tensiones de vigas simplemente apoyadas para distintos estados de cargas puntuales. Cabe indicar que en línea continua se muestran las líneas isostáticas de compresión y en línea discontinua se muestran las líneas isostáticas de tracción. (Imagen tomada de [Mainstone 1975, 40]).

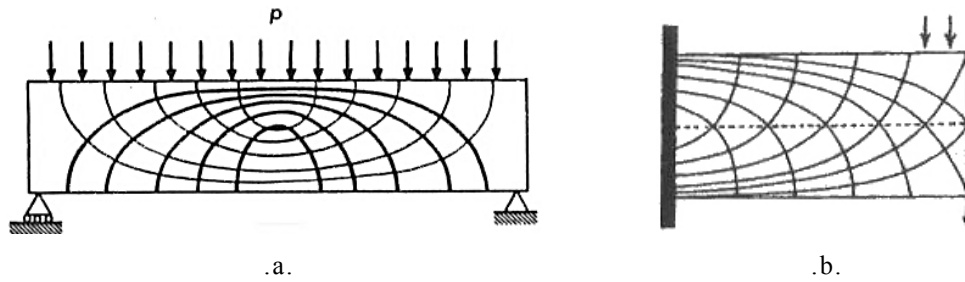


Figura 1.8-22. Líneas isostáticas de tensiones en vigas: a) Simplemente apoyada para carga distribuida, b) En voladizo con cargas puntuales en el extremo. (Imágenes tomadas de [Salvadori et al. 1998, 135] y [Thompson 2003, 221] respectivamente).

Los modelos se analizan con el programa de cálculo SAP2000 v.15 en base al MEF para obtener, de acuerdo a lo anteriormente expuesto, las direcciones de las tensiones principales en cada punto, para trazar las líneas isostáticas de los elementos viga analizados, ya sean apoyadas o en voladizo, como se muestran en las figuras 1.8-23 y 1.8-24. Posteriormente se analizaran como vigas en celosía con las mismas características geométricas, condiciones de contorno y solicitaciones, comparando su rendimiento estructural (capítulo 2).

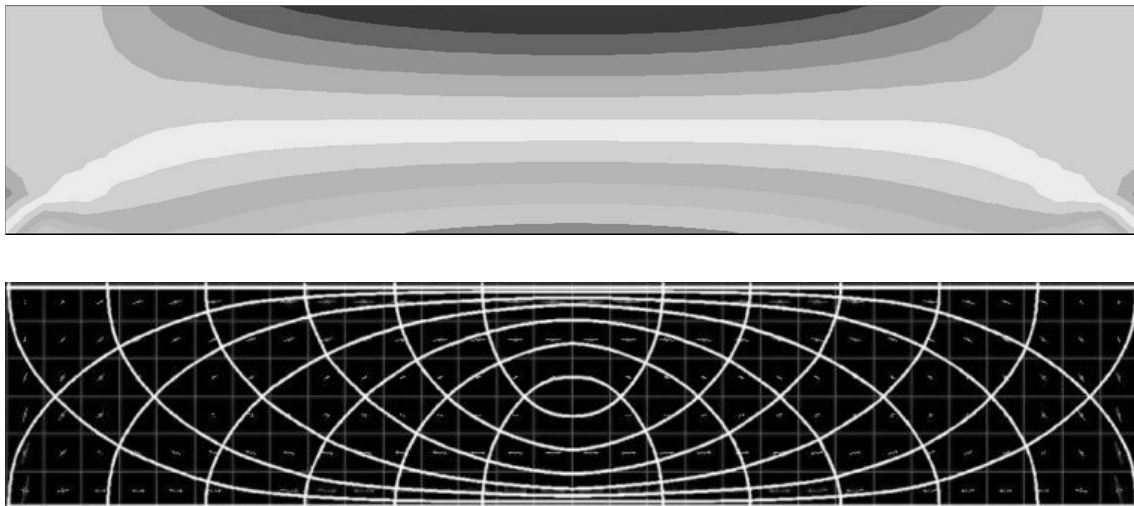


Figura 1.8-23. Diagrama de esfuerzos axiales y dirección de las tensiones principales de una viga simplemente apoyada en los extremos con carga gravitatoria uniformemente distribuida, representado con \cap las líneas isostáticas de compresión y con \cup las líneas isostáticas de tracción. (Imágenes propias adaptadas del SAP 2000 v.15 en base al MEF).

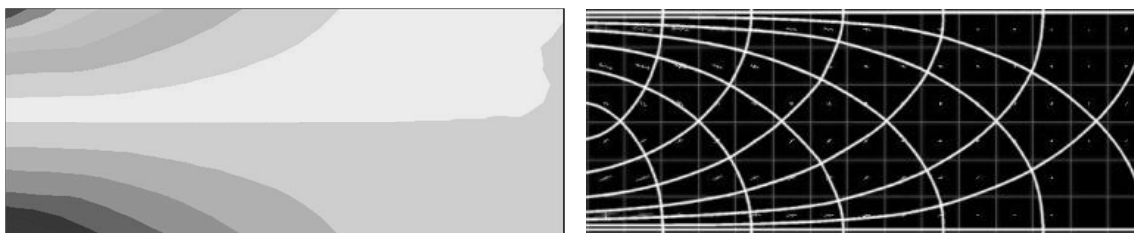


Figura 1.8-24. Diagrama de esfuerzos axiales y direcciones de las tensiones principales de una viga en voladizo con carga distribuida, representado con \cup las líneas isostáticas de compresión y con \cap las líneas isostáticas de tracción. (Imágenes propias adaptadas del SAP 2000 v.15 en base al MEF).

1.9 La búsqueda de estructuras que se basan en la identificación de las direcciones principales

De acuerdo a la temática tratada a lo largo del presente capítulo, se desprende que la relación entre la forma y la función estructural permite obtener estructuras más eficientes, cuando se asemeja el eje estructural de la geometría a la trayectoria de las líneas isostáticas o línea de acción. Con ello, se consigue que las estructuras o elementos resistentes trabajen principalmente a esfuerzos axiales, optimizando su sección resistente.

Son muchos los autores que han basado sus proyectos en la búsqueda de la función estructural y, en definitiva, en la mejora de la eficiencia mecánica conforme a la forma según las cargas actuantes que deben soportar. Para ello, en numerosas ocasiones se han utilizado los métodos y las técnicas derivadas de la Estática Gráfica, como se ha descrito anteriormente. Asimismo, la búsqueda de la forma se ha centrado en el estudio para definir las dimensiones más adecuadas y, en consecuencia, las proporciones y la escala que definen los elementos resistentes o estructurales de acuerdo las acciones exteriores a las que están sometidas.

Uno de los ejemplos más universales, atendiendo a la relevancia de la forma y de la proporción de los elementos resistentes, es la demostración del «efecto de la escala» de **Galileo Galilei** (1564-1642), comparando las dimensiones de un hueso de pájaro y un hueso de dinosaurio, como se muestra en la figura 1.9-1. Como indica Heyman ^[1], el dibujo de Galileo representa con ambos huesos la influencia en las proporciones para que éstos sean igualmente resistentes de acuerdo a su función conforme al peso del animal (el hueso grande es linealmente tres veces el hueso pequeño). Este concepto lo expone Jacques Heyman transcribiendo a Salviati dirigiéndose a Sagredo²:

“Sagredo, abandonad esta opinión que mantenéis, [...], de que las máquinas y las estructuras compuestas de un mismo material y teniendo exactamente las mismas proporciones entre sus partes deben ser igualmente (o mejor dicho, proporcionalmente) dispuestas a resistir (o a ceder) a las fuerzas y a los golpes. Porque puede ser demostrado geométricamente que las mayores son siempre proporcionalmente menos resistentes que las más pequeñas.”

Galileo Galilei (1638), citado por [Heyman 2004, 7 y 8].

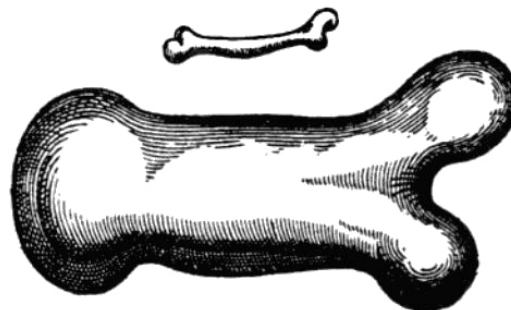


Figura 1.9-1. Demostración del «efecto de la escala» de Galileo, mostrando dos huesos que cumplen funciones análogas en animales de distinto tamaño. (Imagen tomada de [Heyman 2004, 16]).

^[1] Heyman, J. (2004). *Análisis de estructuras. Un estudio histórico*, p. 16.

² Salviati y Sagredo fueron, junto con Simplicio, los tres interlocutores que representaron a Galileo durante las jornadas de *Discorsi intorno a due nuove scienze*, que se publicaron en 1638, [Heyman 2004, 8].

En este sentido, es oportuno destacar la argumentación de Jacques Heyman acerca de este concepto, de vital importancia, en el diseño estructural para un comportamiento más óptimo y eficiente:

“En la primera etapa, se emplea la Teoría de las Estructuras para determinar que estructura soporta realmente sus cargas. [...] La estructura parece poseer, de alguna manera, cualidades antropomórficas y, es más, en los siglos XIX (y XX) nociones tales como la de «mínimo trabajo».

[...] Las tensiones son bajas en estructuras antiguas y medievales. La piedra de un templo griego o de una catedral gótica, o la rosca del arco de un puente de fábrica está trabajando uno o dos órdenes de magnitud por debajo de su resistencia a compresión. Esta es una condición necesaria para la supervivencia a lo largo de los siglos; pero no es suficiente. Es necesario que la forma de la estructura sea correcta, de manera que las fuerzas estructurales puedan acomodarse satisfactoriamente de algún modo; se trata de un problema de geometría. Así, para este tipo de estructuras el cálculo de las tensiones tiene un interés secundario; es la forma de la estructura la que rige la estabilidad.”

[Heyman 2004, 1 y 5].

La diferencia y el contraste de proporción entre el esbelto y fino hueso de un pájaro en comparación con el grande y abultado hueso de un dinosaurio es evidente, enfatizando la importancia del efecto de la escala que expone Galileo. Schlaich^[3] lo ejemplifica planteando el caso de una viga exponiendo que: “por ejemplo si una viga con una luz de 10 m debe tener un grosor de 0,1 m, su espesor aumenta para una luz de 100 m no sólo 10 veces, sino 10 x 10 veces. En consecuencia, la viga debe de ser de 10 m de espesor y su peso total aumenta por un factor de 1000!” En la figura 1.9-2, de acuerdo al concepto de escala propuesto por Galileo, se muestra la relación entre la capacidad resistente y el volumen (peso propio).

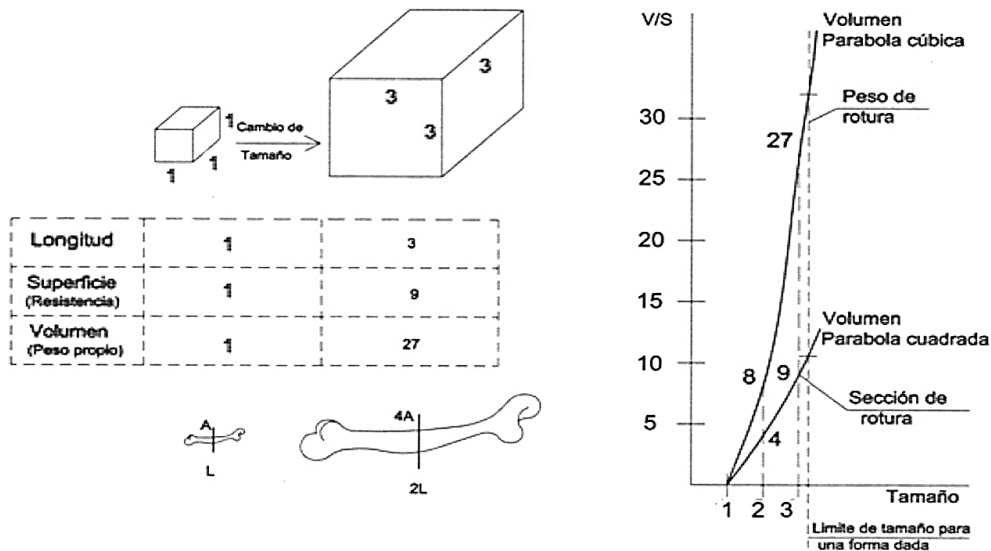


Figura 1.9-2. Relación entre capacidad resistente y volumen con los tamaños planeados por Galileo. (Imagen tomada de [Mas-Guindal 2011, 22]).

El concepto estructural que se muestra en la figura 1.9-2, es un ejemplo de la resistencia y estabilidad, que Mas-Guindal^[4] utiliza para comparar las estructuras anti-

[3] Schlaich, J. (2003). *Light structures: The joy of engineering*, p. 63.

[4] Mas-Guindal, A.J. (2011). *Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*, p. 22.

guas con las estructuras modernas, en los aspectos de resistencia, rigidez y estabilidad. Este principio matemático-geométrico lo enunció Galileo bajo el nombre de la ley del «cuadrado/cubo» mencionada por primera vez en las jornadas *Discorsi intorno a due nuove scienze*, y que dice así:

“(Una máquina) cuanto más grande sea tanto más débil ha de ser [...]. Hay un límite que se impone con necesidad no sólo a las máquinas, sino a las naturales incluso, y más allá del cual no puede pasar ni el arte ni la naturaleza, ni siquiera en el caso de que las proporciones permanezcan invariables y la materia idéntica [...] del mismo modo que los animales más pequeños son proporcionalmente más fuertes y robustos que los más grandes, así también se sostienen los arbustos que son más pequeños [...] sería imposible construir estructuras óseas de hombres ... que pudiesen mantenerse y realizar sus propios menesteres, a no ser que se utilizase un material más duro y resistente que el normal, en caso de que no se les agrandaran tales huesos de modo tan desproporcionado [...].”

Galileo Galilei (1638), citado por [Cervera Bravo 1982, 51].

“La resistencia de cualquier estructura que pueda hundirse por rotura de sus materiales no puede predecirse a partir de modelos o variando la escala de estructuras experimentadas previamente”.

Principio de Galileo Galilei, citado por [Gordon 1978, 2004, 188].

A lo cual James Edward Gordon añade la siguiente argumentación:

“Esto se debe a que, cuando variamos la escala, el peso de la estructura crece con el cubo de sus dimensiones; es decir, si duplicamos sus lados, el peso aumenta ocho veces. El área de las secciones que deben soportar estas cargas, sin embargo, crece sólo con el cuadrado de sus dimensiones, por lo que, en una estructura duplicada, estas secciones aumentarán sólo cuatro veces su área. De esta forma la tensión crece linealmente con el área, y, si duplicamos su tamaño, duplicamos las tensiones [...]”

[Gordon 1978, 2004, 188].

Galileo era muy consciente de la importancia del factor escala en los elementos resistentes y, por ello, explicó la variación del tamaño y de las proporciones de una estructura de acuerdo a su forma, al observar el crecimiento de las estructuras óseas de los seres vivos. Galileo con su comparación, de acuerdo a la relación de dimensiones entre el hueso de pájaro con el equivalente hueso de dinosaurio, demuestra que en la Naturaleza se establece la relación entre el peso a soportar y la sección resistente de una estructura ^[5].

En este contexto, como expone Schlaich ^[6], el aumento de la luz de un elemento resistente incrementa su peso de forma considerable, así que, no es de recibo el incremento de luz de una estructura de forma innecesaria o gratuita. Asimismo, define que esta ley resistente acerca de la escala se puede evitar con algunas soluciones constructivas. **En el caso de la viga que trabaja a flexión, se puede substituir por barras solicitadas, principalmente, a esfuerzos de tracción y de compresión pura, como es el caso de una viga en celosía, evitando de forma generalizada los esfuerzos de flexión y de cortante.** El comportamiento estructural, así como el estudio de las vigas de celosía, para determinar su rendimiento, se tratarán ampliamente en el segundo capítulo.

[5] Mas-Guindal, A.J. (2011). *Mecánica de las estructuras antiguas o cuando las estructuras no se calculaban*, p. 26.

[6] Schlaich, J. (2003). *Light structures: The joy of engineering*, p. 63.

De acuerdo a lo expuesto en los epígrafes anteriores, ya en la antigüedad, este aspecto era interpretado por los maestros de obras y constructores que aplicaban, implícitamente, las reglas de la proporción en el momento de establecer el equilibrio de las construcciones proyectadas. Este aspecto es ciertamente relevante, hasta el punto que las construcciones con dinteles planos realizados con grandes bloques de piedra de los griegos dejaron de utilizarse con el paso del tiempo, dando lugar a las construcciones medievales con arcos góticos y bóvedas, como la mostrada en la figura 1.9-3, que podían ser construidas con piezas de dimensiones más reducidas sin la necesidad de cargar con grandes pesos ^[7], obteniendo estructura mucho más eficientes y optimizadas, como describe Robert Brufau Niubó:

“La evolución de la Arquitectura Gótica, a medianos del siglo XII, trajo un interesante cambio conceptual en la forma de entender el equilibrio estructural de los grandes edificios. La concepción de que todos los elementos como una unidad global, donde bóvedas, cúpulas, arcos, columnas, arbotantes, contrafuertes y pináculos trabajaban conjuntamente, sin que se pudiera entender la presencia de uno de estos elementos sin entender la de los demás, conllevó que las construcciones se racionalizaran enormemente, reduciendo de forma muy notable su masa, al lograr secciones mucho más ligeras para todos sus elementos.”

[Brufau Niubó 1998/99, 8].

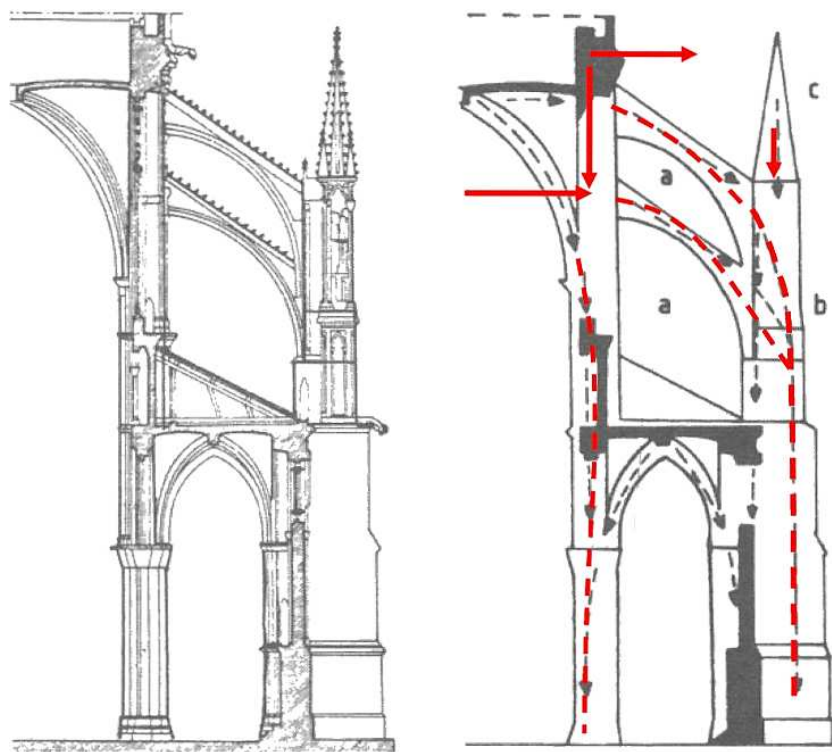


Figura 1.9-3. Esquema de la mitad de la sección transversal de una catedral de estilo gótico. (Imagen tomada de [Hormigón estructural 2005, 18]).

Es por ello por lo que, las catedrales góticas se convierten en un ejemplo histórico de las construcciones en las cuales la estructura o sistema resistente define de forma significativa el diseño arquitectónico, a la vez que sus formas geométricas y soluciones tridimensionales responden a una clara estrategia de optimización. En la figura 1.9-3, se aprecia como las fuerzas horizontales transmitidas por los sistemas

^[7] Gordon, J.E. (1978). *Estructuras o por qué las cosas no se caen*. Traducción del 2004, p. 190.

de arbotantes, que actúan como bielas comprimidas, son asumidas por los botareles o contrafuertes extremos que a modo de “muletas” garantizan el equilibrio del conjunto constructivo ^[8]. De esta manera, se reduce la cantidad de material necesario para generar espacios de mayores dimensiones. Este estilo arquitectónico rompe con las pesadas construcciones románicas que basan su resistencia a partir de grandes masas ^[9]. Es por esta razón, que las construcciones medievales y renacentistas, en base a la experiencia de los maestros de obra y de los canteros, ya proyectaban y construían teniendo en cuenta conceptos básicos de equilibrio de acuerdo a la geometría, en principio, sin una amplia base matemática.

En la figura 1.9-4, se aprecia una de las estrategias constructivas utilizada en las edificaciones antiguas (catedrales, iglesias, etc.) para transmitir las fuerzas a través de la sección resistente que conforman los muros, mediante la colocación de pináculos, estatuas o, simplemente, con la prolongación del muro hacia arriba, como argumenta James Edward Gordon:

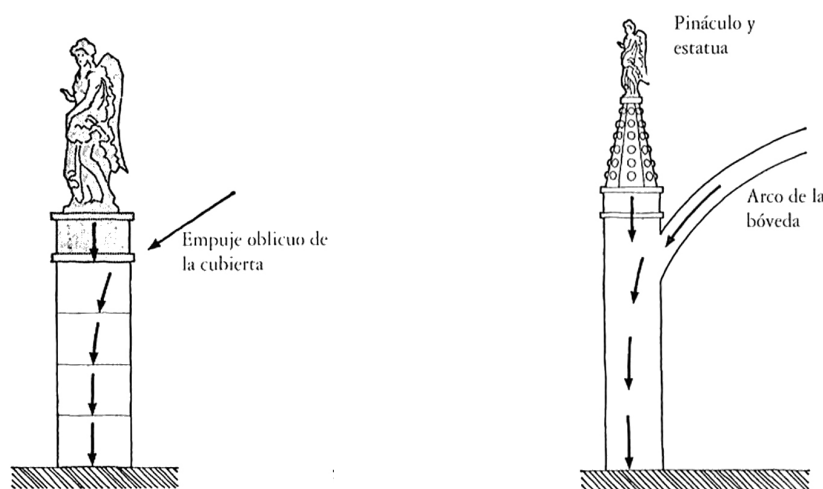


Figura 1.9-4. Estatua o pináculo en la coronación de muro para compensar el empuje horizontal. (Imagen tomada de [Gordon 1978, 2004, 178]).

“La mejor manera de definir (la excentricidad de la carga actuante) es por medio de lo que se llama «línea de presiones», es decir, una línea que pasa a través del espesor del muro de un edificio desde su cúspide a su base, y que une las posiciones sucesivas que toman las resultantes de las cargas de cada junta. La línea de presiones es un concepto descubierto por la escuela francesa [...].

En un muro, pilar o columna perfectamente simétrico (en geometría y carga, figura 1.9-5a), la línea de presiones pasa evidentemente por el centro del muro, y por lo tanto obtenerla no es ningún problema. Sin embargo, un edificio que tenga alguna pretensión de refinamiento debe soportar al menos una fuerza oblicua debida al empuje horizontal de los elementos de cubierta, de los arcos, de las bóvedas o de cualquier otro tipo de construcción asimétrica. En tal caso, la línea de presiones no pasa exactamente por el centro del muro, recorriendo un camino curvo (figura 1.9-5b).

Una de las soluciones que podemos aplicar, y puede ser una de las más acertadas, es añadir peso auxiliar en la parte superior del muro. En la figura 1.9-5c se representa gráficamente lo que ocurre. Al contrario de que podría suponerse, un peso actuante en su parte superior, hace al muro más estable, no menos, y puede rectificar una línea de presiones comprometida hacia un recorrido más estable”.

[Gordon 1978, 2004, 176 y 177].

[8] Hormigón Estructural, U.D. (2005). *Notas para una historia del Hormigón Estructural*, p. 18.

[9] Brufau Niubó, R. (1998/99). *Introducció a les estructures. Les funcions de l'estructura*, pp. 33 y 45.

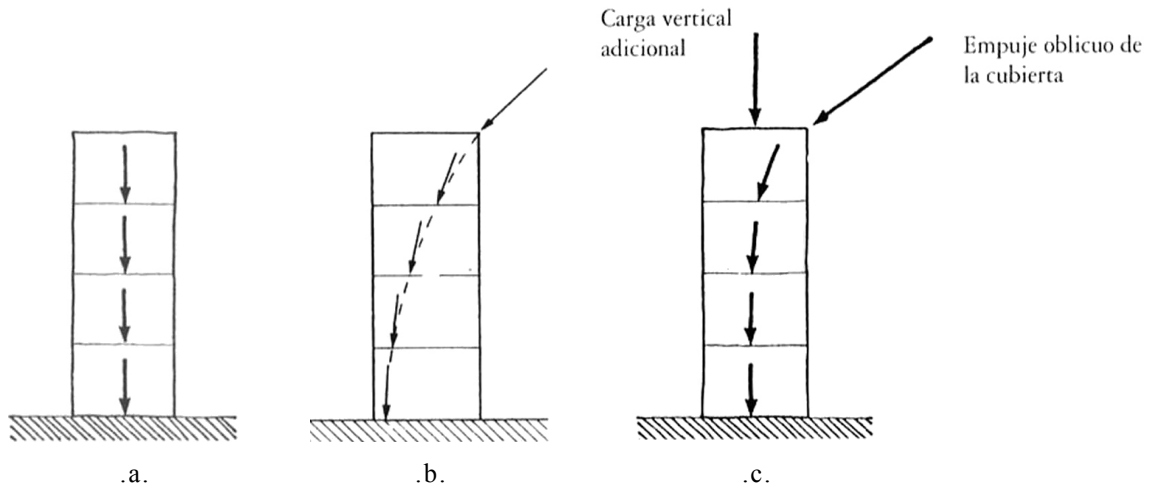


Figura 1.9-5. a) Carga simétrica, línea de presiones en el centro de la sección, b) Desplazamiento de la línea de presiones por acción de carga oblicua, c) Disminución de la excentricidad al aplicar una carga vertical adicional. (Imágenes tomadas de [Gordon 1978, 2004, 177]).

En este contexto, se reafirma la idea de entender las direcciones principales de las tensiones de presión para un diseño más eficaz y óptimo de las estructuras, de forma que se traten las estructuras según sus solicitaciones, para obtener estructuras que trabajen, básicamente, a esfuerzos puros axiales ya sean de compresión o de tracción, minimizando los esfuerzos de flexión y de corte. En la figura 1.9-6, se aprecia el mismo concepto expuesto por Gordon ^[10] acerca de la trayectoria de las líneas isostáticas de un elemento resistente frente a una carga vertical y una carga oblicua, ambas aplicadas en la parte superior de un elemento resistente vertical en voladizo.

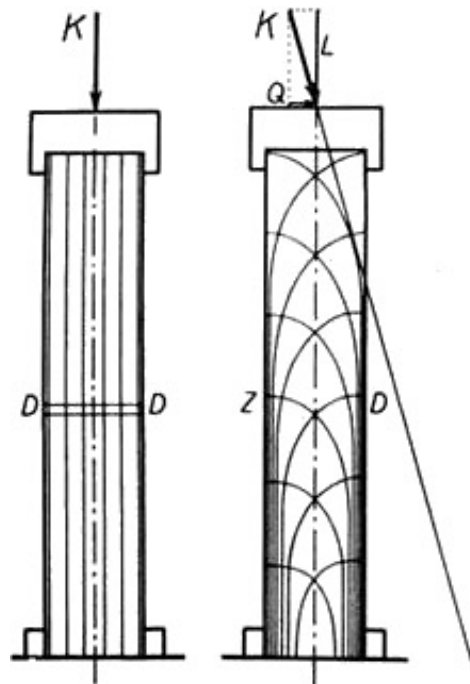


Figura 1.9-6. Representación de las líneas isostáticas: a) Carga vertical, b) Carga oblicua. (Imagen tomada de [Kummer 1959, 33]).

^[10] Gordon, J.E. (1978). *Estructuras o por qué las cosas no se caen*. Traducción del 2004.

En este sentido, el gran avance se produjo con el estudio de las direcciones principales de las tensiones, que suponen una herramienta que permite diseñar y optimizar elementos resistentes de acuerdo a sus solicitaciones desde el punto de vista de la resistencia, así como desde la estabilidad o el equilibrio estático. Esta práctica se ha utilizado de forma recurrente a lo largo de la historia para el diseño de distintos elementos resistentes o estructurales. Son muchos los ejemplos y estudios en base a este concepto para el diseño de dichos elementos, en buen número de ocasiones inspirados en las formas de la Naturaleza, ya que las leyes que la rigen, por lo general, se basan en el ahorro de energía y por lo tanto de acuerdo al principio de optimización según la disposición lógica de los elementos resistentes.

Es por ello por lo que las formas naturales, así como, la anatomía y la estructura ósea de los seres vivos han sido objeto de estudio desde hace siglos, dando origen al área de conocimiento de la biomecánica. La biomecánica, que estudia todos los aspectos relacionados con el movimiento y el equilibrio de los seres vivos, se remonta a la época de los griegos de la mano del filósofo y científico, discípulo de Platón, **Aristóteles** (384 a.C. - 322 a.C.) referenciado en el apartado 1.4. Aristóteles inició y promovió el estudio de la biomecánica, siendo considerado por ello el primer biomecánico. Después de su gran aportación, nuevos científicos y pensadores siguieron los pasos de su predecesor. Uno de los cuales fue **Giovanno Alfonso Borelli** (1608-1679), quien con su publicación póstuma *De Motu Animalium* fue el primero en tratar el comportamiento de la palanca en los seres vivos ^[11].

El estudio de la biomecánica permitió grandes avances en el área de la tecnología y ciencias de la ingeniería, que han sido de gran relevancia y aportación de conocimientos en campos como la mecánica de ingeniería de materiales y de la mecánica estructural. Pero no es hasta la segunda mitad del siglo XIX, después de casi un siglo sin avances de mayor relevancia, que se produce un gran desarrollo tecnológico. Ello se debe a las investigaciones realizadas por el médico, investigador y fotógrafo francés **Étienne Jules Marey** (1830-1904), pionero en la aplicación de la fotografía para correlacionar las fuerzas de reacción del suelo con el movimiento, conocido como el «análisis del movimiento moderno» ^[11].

Unos años más tarde, en Alemania, los hermanos **Ernst Heinrich Weber** (1795-1878) y **Eduard Friedrich Weber** (1806-1871) aprovecharon los avances tecnológicos de Marey para formular varias hipótesis acerca del movimiento humano, pero fue **Christian Wilhelm Braune** (1831-1892) y su discípulo, **Otto Fischer** (1861-1917), quienes avanzaron de forma significativa en el ámbito de la ingeniería mecánica. Paralelamente, debido a las fuertes demandas originadas por la revolución industrial, emergieron los ingenieros de materiales procedentes fundamentalmente de países como Francia y Alemania. Los ingenieros habían aprendido acerca de los esfuerzos principales de Cauchy, conocimientos que utilizaban para el cálculo de tensiones en los puentes de trenes que diseñaban y analizaban, dando lugar al resurgimiento de la analogía biomecánica cuando el ingeniero alemán **Karl Culmann** (1821-1881) estaba trabajando en el diseño de una nueva grúa ^[11].

Culmann en su afán de diseñar una nueva grúa, esta vez con forma curvada, se inspiró en la disposición de las líneas trabeculares de un hueso humano que estaba diseccionando su amigo anatomista **Georg Hermann von Meyer** (1815-1892), como se muestra en la figura 1.9-7. Culmann pudo observar la disposición ortogonal de las trabéculas ^{[12][13]}, reconociendo las direcciones principales de tracción y de

^[11] Bruce Martin, R. (1999). *A Genealogy of Biomechanics*, pp. 1-8.

^[12] Meyer, G.H. von (1867). *Die Architektur der Spongiosa*, pp. 615-628.

^[13] Oliva Quecedo, J. (2007). *Modelos de cálculo para solicitaciones estáticas y dinámicas en huesos. Aplicación a la simulación mediante elementos finitos de impactos en el fémur humano*.

compresión generadas por la carga funcional del hueso estudiado ^{[14][15]}, y que D'Arcy Wentworth Thompson describe como:

“[...] La disposición de las trabéculas óseas no era ni más ni menos que un diagrama de las líneas de tensión, o direcciones de tracción y de compresión, en la estructura cargada: en resumen, la Naturaleza estaba reforzando el hueso en la manera y dirección precisas en donde se requería la fuerza; [...]”

[Thompson 1961, 2003, 225].

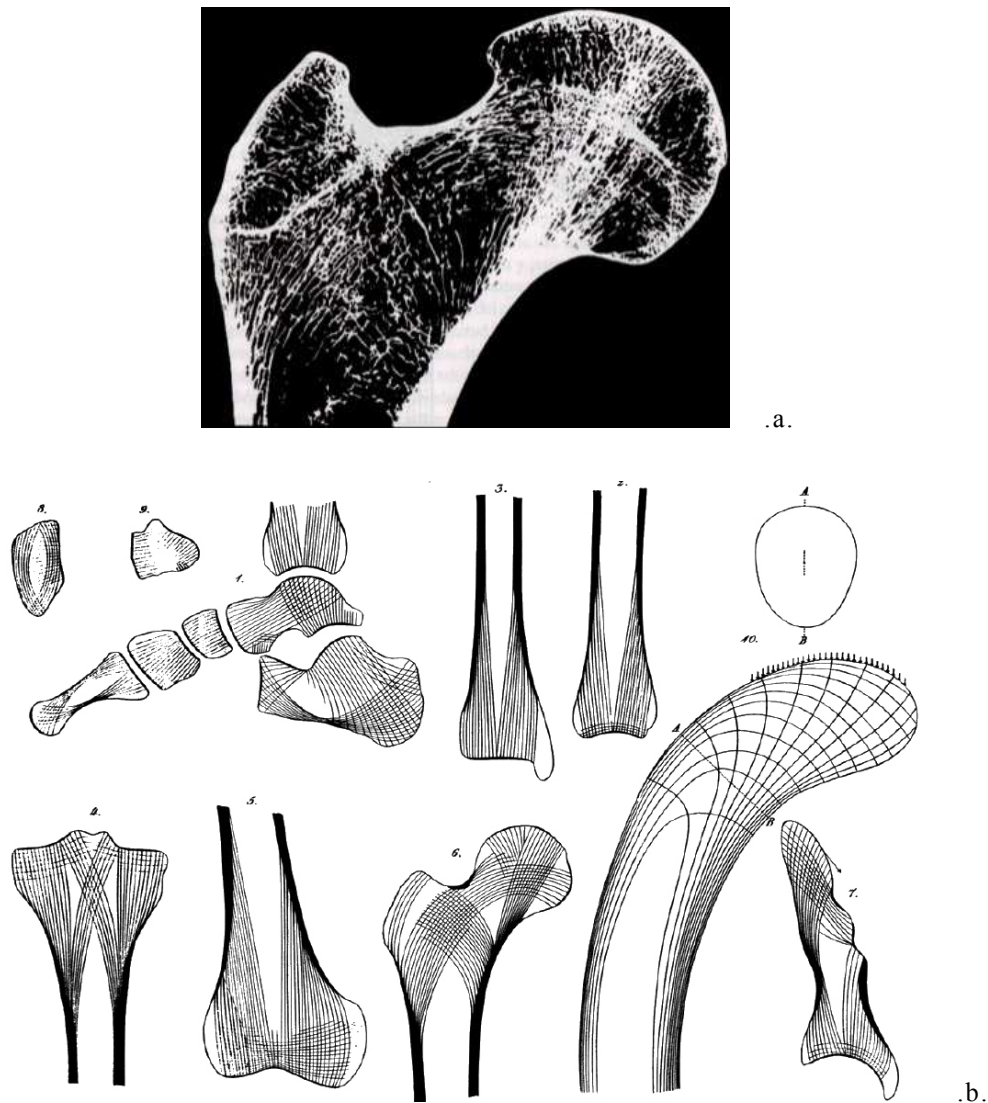


Figura 1.9-7. a) Cabeza de fémur humano seccionado, según Schäfer y A. Robinson), b) Dibujos de [von Meyer 1867] mostrando la grúa de Culmann junto con varios huesos humanos. (Imágenes tomadas de [Thompson 1961, 2003, 225] y [Skedros et al. 2007, 17] respectivamente).

Dicho encuentro entre Culmann y von Meyer se produjo el año 1867, cuando el anatomista estaba estudiando y analizando los patrones de las arqueadas líneas tra-

^[14] Rüttimann, B. (1992). *A noteworthy meeting of the society for nature research in Zurich: Two important precursors of Julius Wolff: Carl Culmann and Hermann von Meyer*, pp. 13-22.

^[15] Skedros, J.G.; Baucom, S.L. (2007). *Mathematical analysis of trabecular “trajectories” in apparent trajectorial structures: The unfortunate historical emphasis on the human proximal femur*, p. 17.

beculares de un hueso humano, en concreto, de la cabeza de un fémur, mientras que el ingeniero alemán Culmann al examinarlo, pudo relacionar las líneas observadas en la cabeza del fémur con el análisis mecánico de una grúa ^[16], como se aprecia en las figuras 1.9-8 y 1.9-9.

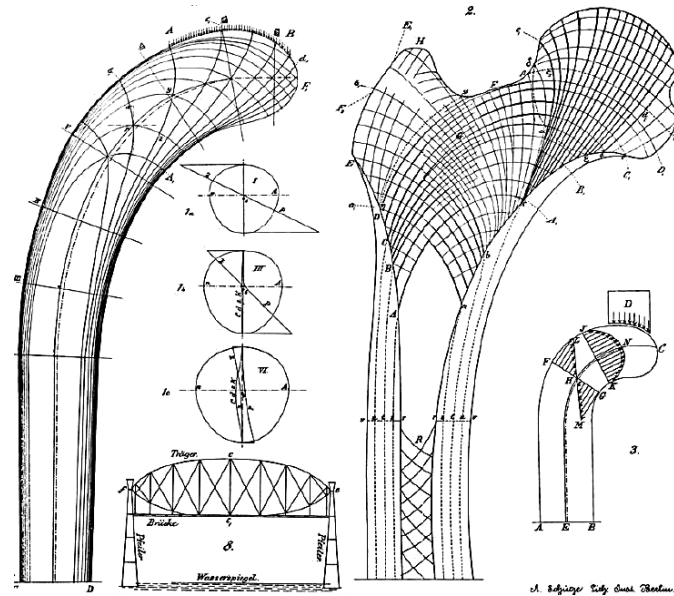


Figura 1.9-8. Dibujo presentado en [Wolff 1870] sobre la trayectoria de las tensiones principales de la grúa de Culmann y modelo de la estructura trabecular del fémur estudiado por von Meyer. (Imagen tomada de [Skedros et al. 2007, 18]).

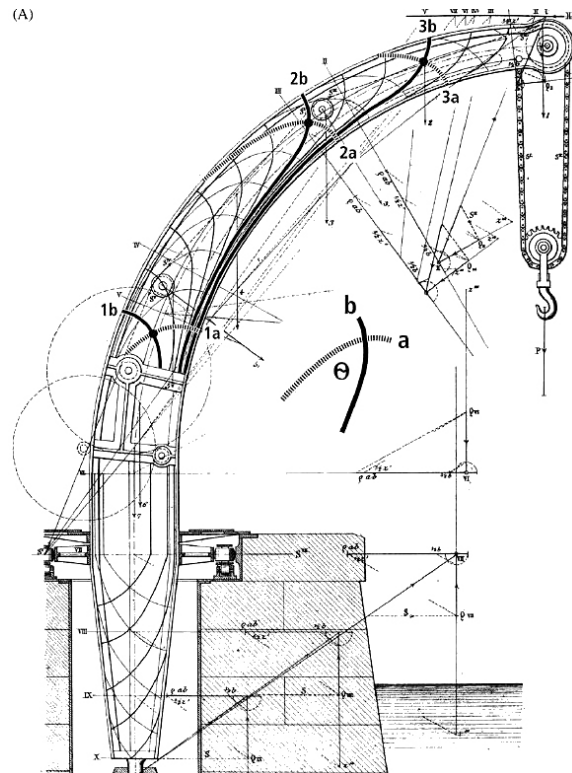


Figura 1.9-9. Análisis de la grúa de Culmann presentado en [von Meyer 1867] y [Wolff 1870, 1892]. (Imagen tomada de [Skedros et al. 2007, 21]).

^[16] Forriol Campos, F. (2001). *Respuesta ósea a las solicitaciones mecánicas en condiciones fisiológicas*.

En base a ello, Culmann “estableció una analogía entre estos patrones trabeculares y la trayectoria de las tensiones principales de la viga corta en voladizo que había ilustrado el año 1866, en su libro acerca de la Estática Gráfica” ^[17].

A principio del siglo XX, en concreto el año 1904, el ingeniero australiano **Anthony George Maldon Michell** (1870-1959) estudió la forma de las espirales equiangulares o logarítmicas ¹⁸ para analizar el comportamiento de un elemento en voladizo. Para ello, Michell interpretó las líneas o flujos de presión para conseguir una tensión equivalente, en todos los puntos, de acuerdo a un espacio y unas orientaciones específicas entre el punto fijo o soporte y el extremo del voladizo ^[19]. El resultado obtenido se muestra en la figura 1.9-10.

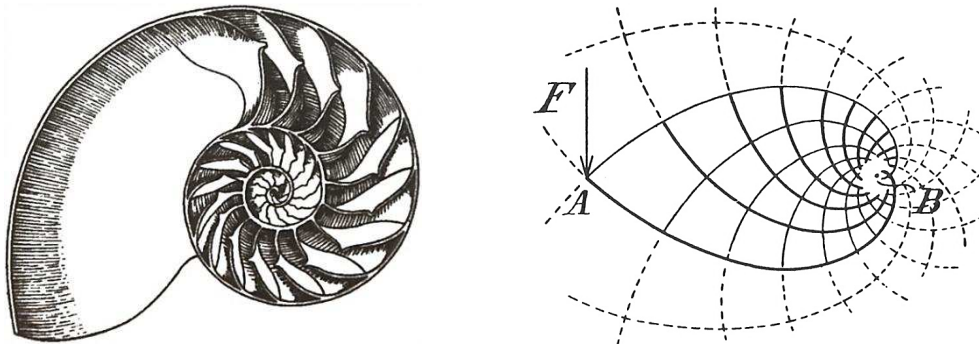


Figura 1.9-10. Concha de *Nautilus pompilius* de J. C. Chenu (1808-1879) y diagrama de fuerzas del voladizo definido por [Michell 1904] bajo la acción de una carga puntual²⁰. (Imágenes tomadas de [Thompson 2003, 172] y [Mainstone 1975, 296] respectivamente).

Michell centró su investigación en definir geometrías de celosías con el mínimo peso propio para un determinado estado de cargas y condiciones de equilibrio. En la figura 1.9-11, se aprecia el entramado resultante para un elemento biapoyado en los extremos (puntos *A* y *B*), para una carga puntual *F* en el centro de la viga.

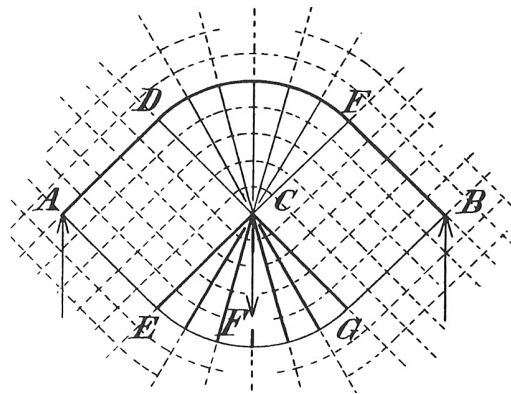


Figura 1.9-11. Geometría del entramado para viga en celosía biapoyada según [Michell 1904]. (Imagen tomada de [Mainstone 1975, 296]).

^[17] Skedros, J.G.; Baucom, S.L. (2007). *Mathematical analysis of trabecular “trajectories” in apparent trajectorial structures: The unfortunate historical emphasis on the human proximal femur*, p. 16.

¹⁸ Se llama espiral equiangular o logarítmica a “cualquier curva plana procedente de un punto fijo (o polo), y tal que el área vectorial de cualquier sector sea siempre un gnomon respecto la figura total precedente”, [Thompson 1961, 2003, 182].

^[19] Sarkisian, M.; Lee, P.; Long, E.; Shook, D. (2010). *Organic and Natural Forms in Building Design*, p. 2844.

²⁰ “Una carga puntual aplicada en *A* en dirección perpendicular a la línea *AB* es equilibrada por una fuerza de igual valor pero sentido contrario y un momento de valor $F \times AB$ aplicados en el punto *B*. El mínimo entramado se forma con dos espirales equiángulares similares que tienen su origen en *B* y que intersecan ortogonalmente en *A*, junto con las demás espirales ortogonales a éstas y encerradas entre ellas”, [Sarkisian et al. 2010, p. 2844].

En este contexto, es oportuno reiterar los numerosos estudios realizados acerca de la función de la forma, en muchas ocasiones inspirados en las formas de la Naturaleza y, por lo tanto, de acuerdo al principio de optimización en base a los esfuerzos principales. En este sentido, la obra d'Arcy Thompson es uno de los máximos referentes en este ámbito, la cual ha sido, y es ampliamente estudiada, a la vez que utilizada por otros investigadores, ya que encuentran en ella una sólida base conceptual acerca de la función estructural de la forma, conforme a las leyes del crecimiento de los seres vivos. En la figura 1.9-12, se aprecia el esquema de una viga en voladizo equivalente al esqueleto de un dinosaurio de acuerdo a Thompson ^[21].

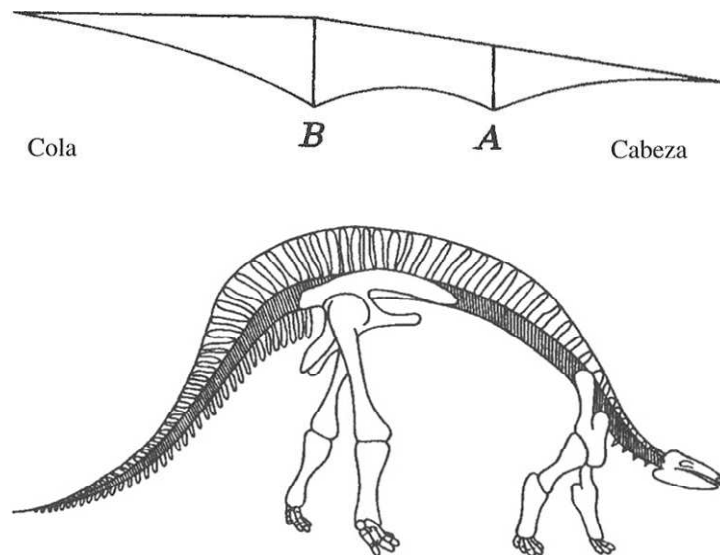


Figura 1.9-12. Diagrama de fuerzas de una columna vertebral de dinosaurio y diagrama de una estegosaurio. (Imágenes tomadas de [Thompson 1961, 2003, 243 y 247] respectivamente).

En el esquema en voladizo definido por d'Arcy Thompson se aprecia el parecido con el esquema estructural que se utilizó para la construcción del puente en ménsula sobre el estuario del río Forth en Edimburgo construido entre los años 1882 y 1890, el cual se muestra en la figura 1.9-13, y que se caracterizó por alcanzar hitos tecnológicos nunca superados anteriormente, dadas su dimensiones. El puente fue obra de **John Fowler** (1817-1898) y **Benjamín Baker** (1840-1907).

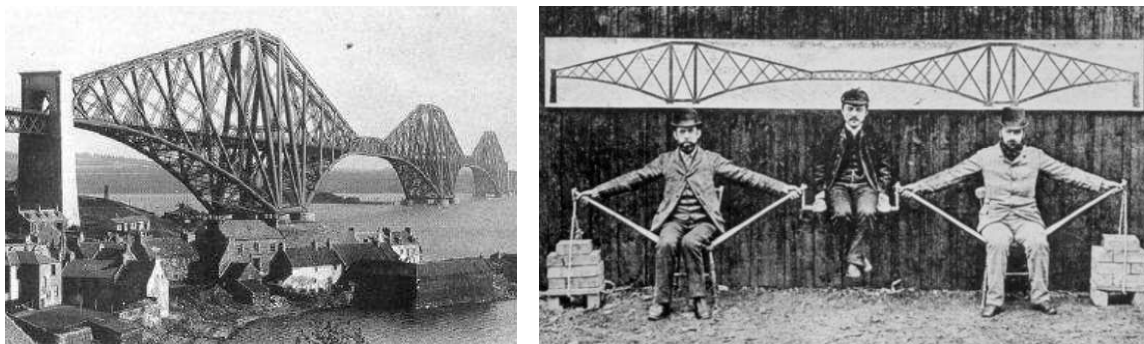


Figura 1.9-13. Puente sobre el estuario del río Forth en Edimburgo y explicación conceptual de los propios ingenieros. (Imágenes tomadas de [Hormigón estructural 2005, 54] y [Hoffman s.f.] respectivamente).

^[21] Thompson, D.W. (1961). *Sobre el crecimiento y la forma*. Traducción del 2003.

En cuanto a la búsqueda de la forma estructural inspirada en la Naturaleza y en la identificación de las direcciones principales, es oportuno destacar la figura de **Antoni Gaudí Cornet** (1852-1926). Gaudí fue un arquitecto que se inspiró en los diseños estructurales de acuerdo al equilibrio que poseía la Naturaleza, observando sus fenómenos biológicos y geomórficos. Por ello, Kent y Prindle ^[22] definieron en base a la rampa del Parc Güell como “la evolución desde aquellas elegantes imitaciones del gótico en el decenio de 1880. Formas que habían tenido su principio como normas del renacimiento medieval en el trabajo de las nervaduras [...], y estructuras orgánicas que Gaudí tomaba directamente del «libro de la Naturaleza»”.

Además Gaudí, en busca de la comprensión estructural, realizaba estudios experimentales y modelos físicos para definir la forma más adecuada de sus creaciones, utilizando el concepto, entre otros, de la inversión catenárlica. Como indican Tomlow ^[23] y Wendland ^[24], Gaudí, con su proyecto de la cripta de la iglesia de la Colonia Güell, “fue el primero en realizar un proceso de autogeneración en un modelo físico para determinar la forma de la estructura completa de un edificio entero”. Para ello, realizó un modelo funicular tridimensional de unos seis metros de longitud y cuatro metros de altura, correspondiente a una escala de 1/10, hecho con cables y con pequeños sacos llenos de plomo para simular las cargas, la cual se muestra en la figura 1.9-14.



Figura 1.9-14. Modelo colgante de Gaudí para la cripta de la Colonia Güell. (Imágenes tomadas de [Tomlow 1989, 65] y [Hormigón estructural 2005, 21] respectivamente).

Con ello, Gaudí conseguía definir geometrías altamente eficientes en base a las direcciones principales. Este tipo de cálculo (en referencia al principio de la inversión catenárlica), a pesar de que es muy simple y se reduce a un arco, como indica

^[22] Kent, C.; Prindle, D. (1992). *Hacia la Arquitectura de un Paraíso: Park Güell*, pp. 119 y 120.

^[23] Tomlow, J. (1989). *The Model: Antoni Gaudí's hanging model and its reconstruction – New light on the design of the church of Catalonia Güell*, p. 43.

^[24] Wendland, D. (2003). *Model-based form-finding processes: free form in structural and architectural design*, p. 106.

Serrallonga ^[25], es claramente el primer procedimiento histórico de Gaudí como método con modelos funiculares tridimensionales.

Después de ello, numerosos proyectistas siguieron la línea de realizar modelos físicos a escala para estudiar y analizar el comportamiento estructural de sus proyectos en fases embrionarias. Autores como **Eduardo Torroja Miret** (1899-1961) en obras como el mercado de Algeciras (1933) o la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela (1935), así como, el modelo del Hangar de Orvieto (1935), el modelo de microcemento de la torre Pirelli en Milán (1955) o el modelo de la Place Victoria Tower en Montreal (1962) de **Pier Luigi Nervi** (1891-1979) y **Guido Oberti** (1907-2003). Otro ejemplo es el modelo a escala reducida del puente atirantado de **Ricardo Morandi** (1902-1989) probado en ISMES ^[26]. Algunos de los proyectos mencionados se tratarán en el siguiente epígrafe, como **referencias arquitectónicas que basan su diseño en la función resistente de la forma**.

En este contexto, es de especial interés la fecunda y exhaustiva investigación de **Frei Otto** (1925-), de acuerdo a sus experimentos, para la búsqueda de estructuras resistentes por su forma inspirándose, en muchas ocasiones, en la Naturaleza para obtener elementos resistentes más eficientes. En la figura 1.9-15, se aprecia la estructura tensada para el pabellón de Alemania en la Exposición de Montreal el año 1967, la cual ejemplifica uno de los conceptos que recoge en su libro *Finding Form* ^[27], destacando especialmente su aportación en el ámbito de las estructuras tensadas y de las construcciones neumáticas.



Figura 1.9-15. Estructura tensada de Frei Otto y Rolf Gutbrod (1910-1999) para el pabellón de Alemania en la Exposición de Montreal el año 1967. (Imagen tomada de [Otto et al. 2001, 98 y 99]).

[25] Serrallonga Gasch, J. (2003). *Geometria i mecànica en els models de Gaudí*, p. 104.

[26] Chiorino, M.A.; Sabia, D.; Bruno, L. (2013). *Structural models: historical notes and new frontiers*, p. 129.

[27] Otto, F.; Rasch, B.; et al. (2001). *Frei Otto, Bodo Rasch: Finding Form*.

En su libro ^[28] Frei Otto también destaca las elevadas prestaciones estructurales del arco catenárico que han permitido que se haya utilizado, y se utilice, para el diseño y concepción de las más diversas obras y edificaciones, como ejemplifica la red suspendida para modelo de malla espacial, mostrada en la figura 1.9-16.

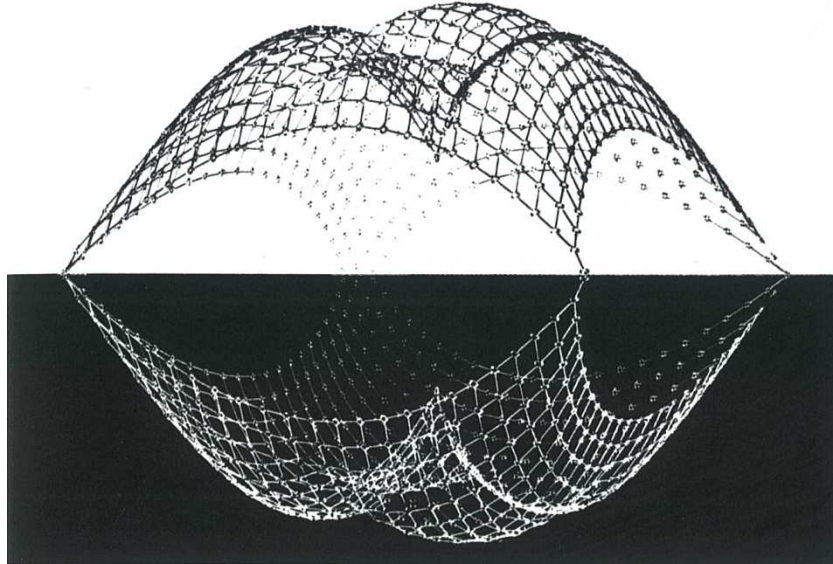


Figura 1.9-16. Red suspendida como modelo de malla espacial. (Imagen tomada de [Otto et al. 2001, 43]).

Quizás, una de las obras más emblemáticas en el ámbito de la arquitectura, en base a la forma del arco catenárico, es el gran *Gateway Arch* en Sant Luis (Missouri), construido entre los años 1963 y 1965, con un altura de 192 metros ^[29], el cual se muestra en la figura 1.9-17. El arco fue proyectado por **Eero Saarinen** (1910-1961) y levantado por sus ingenieros estructurales **Fred Severud** (1899-1990) y **Hannskarl Bander** (1925-1993).

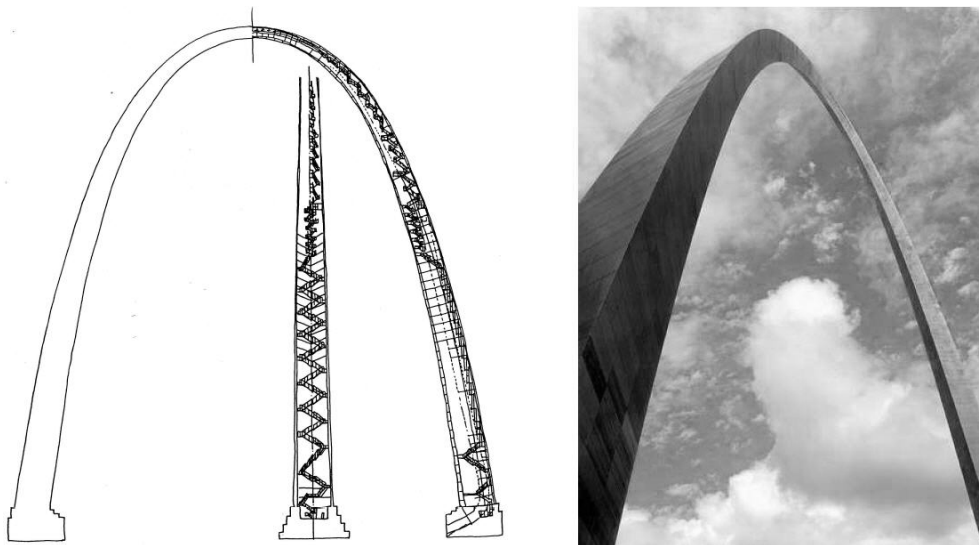


Figura 1.9-17. *The Gateway Arch* en Sant Luis en Missouri. (Imagen tomada de [Brufau Niubó 1998/99, 13]).

^[28] Otto, F.; Rasch, B.; et al. (2001). *Frei Otto, Bodo Rasch: Finding Form*.

^[29] Brufau Niubó, R. (1998/99). *Introducció a les estructures. Les funcions de l'estructura*, p. 12.

1.10 Referencias arquitectónicas que basan su diseño en la función resistente de la forma

De acuerdo a lo expuesto en los epígrafes anteriores, en este apartado se realiza una síntesis de algunos de los proyectos más relevantes en el ámbito de la construcción en base a esta tendencia estructural caracterizada por la forma. Dichos proyectos han sido realizados por arquitectos e ingenieros que han hecho de la forma una filosofía de trabajo como son Robert Maillart (1872-1940), Eugène Freyssinet (1879-1962), Pier Luigi Nervi (1891-1979), Ildefonso Sánchez del Río Pisón (1898-1980), Eduardo Torroja Miret (1899-1961), Ricardo Morandi (1902-1989), Félix Candela (1910-1997), Eladio Dieste (1917-2000), Sergio Musmeci (1926-1981), Heinz Isler (1926-2009) o Mutsuro Sasaki (1941-), entre otros. En el presente epígrafe, se exponen algunos los proyectos de estos arquitectos e ingenieros, los cuales han sido diseñados de acuerdo a este concepto de optimización estructural que Mario Salvadori y Robert Heller definen de la siguiente manera:

“Se denominan estructuras resistentes por la forma a aquéllas cuya resistencia se obtienen dando forma al material según las cargas que deben soportar.”

[Salvadori et al. 1998, 186].

Es de gran relevancia la función que desempeña la forma de un elemento estructural, por ejemplo, en el caso de la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela de Madrid, obra del ingeniero Eduardo Torroja, la curvatura de la cáscara de hormigón le da una mayor rigidez y capacidad resistente, como cuando se dobla una hoja de papel para tener mayor resistencia y estabilidad respecto a la hoja sin doblar ^[1]. Este concepto, mostrado en la figura 1.10-1, lo definen Mario Salvadori y Robert Heller de la siguiente forma:

“La hoja de papel que sostenemos en una mano se curva, incapaz de soportar su propio peso. La misma hoja de papel, doblada en un punto y con una ligera curvatura hacia arriba, soporta su propio peso y aun alguna carga adicional. La nueva capacidad portante no se obtiene aumentando la cantidad de material, sino dándole la forma adecuada. La curvatura hacia arriba aumenta la rigidez y la capacidad portante de la hoja, pues dispone parte del material lejos del «eje neutro», con lo cual aumenta sustancialmente la rigidez a la flexión de la hoja, considerada como una viga [...]”

[Salvadori et al. 1998, 186].



Figura 1.10-1. Ejemplo rigidez hoja de papel doblada y sin doblar. (Imágenes tomadas de [Salvadori et al. 1998, 187].

[1] Señis, R.; Sastre, R.; Brufau, R.; Carbajal, E.C. (2014). *Estudio para la optimización de mallas estructurales de acero envolventes de edificios en altura según sus solicitaciones, en base al análisis de sus líneas isostáticas*. [In press]

Uno de los aspectos característicos de las estructuras resistentes en base a la forma, junto con la búsqueda de geometrías que trabajen principalmente a esfuerzos axiales puros, es la optimización estructural de la sección resistente de acuerdo al concepto de «resistencia equivalente». Anteriormente, en concreto en el apartado 1.4, se ha hecho referencia a este concepto al mencionar el tratamiento de Galileo acerca de la interpretación de los esfuerzos para proponer la geometría de una viga en voladizo de sección variable según el concepto de «igual resistencia».

En este contexto, es oportuno destacar las creaciones del constructor autodidacta **Jean Prouvé** (1901-1984), quien Le Corbusier le definía como “...*Ni arquitecto ni ingeniero, sino ambos reunidos en un solo hombre... Todo lo que toca y concibe toma inmediatamente una elegante forma plástica, conjugando de manera brillante las soluciones de resistencia y de puesta en fabricación...*”.

Prouvé, considerando el concepto de resistencia equivalente, pretendía buscar las soluciones más sencillas, más económicas y más livianas y, en definitiva, más óptimas, ya fuera en sus proyectos o en colaboración con los arquitectos punteros del siglo XX. Las construcciones de Prouvé, altamente influenciadas por su faceta de diseñador de muebles, se caracterizaron por su estilo vanguardista como prueba que a día de hoy todavía lo son, setenta años después de su construcción, gracias a sus ingeniosos y precisos diseños. En la figura 1.10-2, se aprecia el diseño de una mesa de Prouvé, la cual se caracteriza por la funcionalidad y la eficiencia resistente, aspecto propio de sus construcciones como describe Anatxu Zabalbeascoa:

“[...] Las formas de sus sillas eran estrictas, pero no rectilíneas. Seguían los trazos ergonómicos del cuerpo y la Naturaleza [...]”.

[Zabalbeascoa 2006].

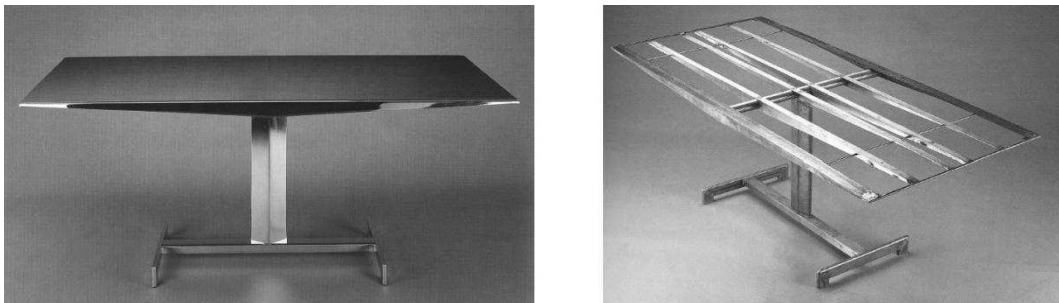


Figura 1.10-2. Diseño de una mesa de acuerdo a la identificación de los esfuerzos solicitantes según Prouvé. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 1998/99, 61]).

Por lo tanto, el punto clave de esta filosofía para el diseño de elementos resistentes, es la optimización para lograr una mayor eficiencia. En este sentido, es oportuno mencionar las estructuras laminares en base a formas resistentes por su forma.

Ildefonso Sánchez del Río Pisón (1898-1980) es considerado uno de los más destacados ingenieros por la aportación de obras de gran relevancia. Sánchez del Río perteneció a la denominada Generación del 27, de la cual también formaban parte José Entrecanales Ibarra (1899-1990), Eduardo Torroja Miret (1899-1961) y Carlos Fernández Casado (1905-1988), bajo la tutela de José Eugenio Ribera Dutaste (1864-1936) de la Escuela de Caminos de Madrid, maestro y pionero en la investigación del hormigón armado en España. Sánchez del Río, es sin duda, uno de los precursores, junto con el arquitecto catalán Antoni Gaudí Cornet (1852-1926), en

el uso de los recursos geométricos de la Estática Gráfica como elemento de inspiración y creación en sus proyectos. Con ello, conseguían que las estructuras trabajasen “por la forma” ^[2].

Inspirado en las dovelas de sillería utilizadas para la construcción de las antiguas bóvedas, Sánchez del Río proyecta grandes cubiertas mediante el uso de *arcos-onda*, como se muestra en la figura 1.10-3. Para ello, dada la complejidad de sus proyectos, es necesario el diseño de una dovela de mayor ligereza, a la vez que aprovecha las ventajas que ofrece el material que está en auge en aquella época: el hormigón armado. Sánchez del Río desarrolla una dovela, para la construcción de bóvedas, de hormigón armado, aligeradas mediante el uso de moldes cerámicos muy ligeros como encofrado perdido.

La clave de dicha dovela reside en la forma estudiada cuidadosamente de su contorno y que permiten obtener espesores muy optimizados. Las dovelas reciben el nombre de «dovelas-onda», las cuales se caracterizan por tener los laterales planos, permitiendo, así, colocar los nervios de hormigón armado que dotan a la sección transversal de una mayor rigidez que impide que la onda se deforme ^[3].

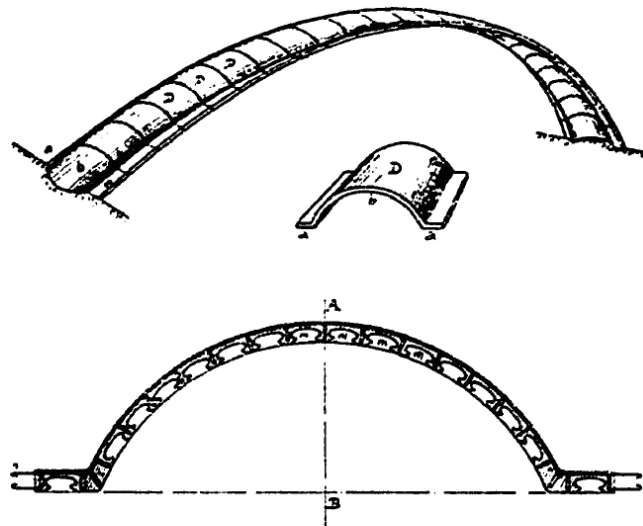


Figura 1.10-3. *Arco-onda* para cubierta y sección de «dovela-onda». (Imágenes tomadas de [Sánchez del Río 1957, 208]).

Con este sistema realizó el Palacio de los Deportes de Oviedo (1961-1975), el cual se considera su gran obra, y que supuso el punto culminante de su trayectoria iniciada en Asturias en los años 20 del siglo anterior. Dicha obra se considera que forma parte de la evolución y el desarrollo de las Estructuras Laminares de la Modernidad ^[2]. Otras obras de relevancia realizadas por Sánchez del Río son el cuarto depósito de aguas o el paraguas de hormigón armado, ambas en Oviedo.

En el año 1938, aprovechando la exposición Internacional de Zurich, el ingeniero suizo **Robert Maillart** (1872-1940), proyectó y construyó el Pabellón del Cemento con una cáscara de hormigón armado de seis centímetros de espesor. La bóveda de hormigón, la cual respondía a un diseño altamente eficiente, estaba sujeta por dos arcos centrales atirantados que también respondían a un trazado optimizado. En la figura 1.10-4, se aprecia la construcción de dicha estructura laminar continua.

^[2] Cassinello Plaza, P.; et al. (2011). *Ildefonso Sánchez del Río Pisón. El ingenio de un legado*.

^[3] Sánchez del Río Pisón, I. (1957). *La construcción de grandes bóvedas por el sistema de «dovelas-onda»*. pp. 207 y 208.

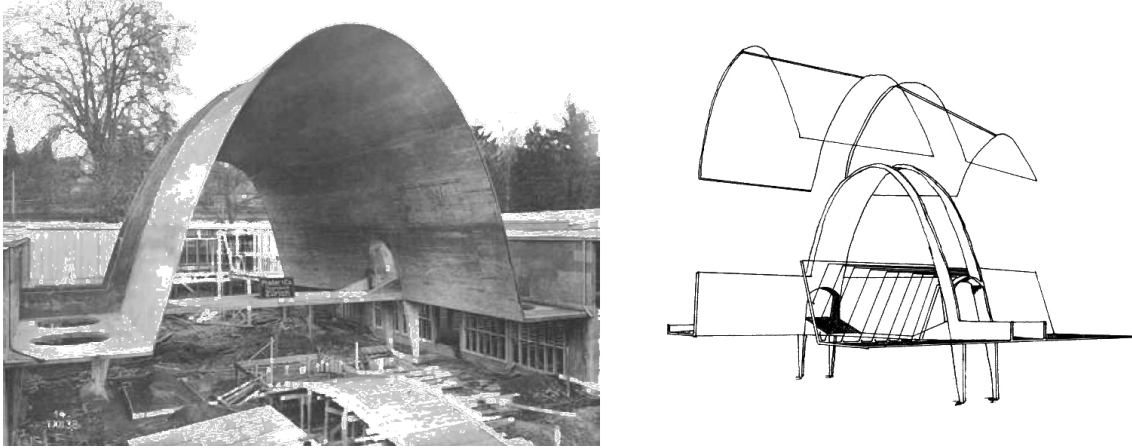


Figura 1.10-4. Estructura laminar de hormigón armado para el Pabellón del Cemento obra de Maillart para la Exposición Internacional de Zurich en 1938. (Imágenes tomadas de [Brufau Niubó 1998/99, 29]).

En este contexto, cabe destacar la figura de **Franz Anton Dischinger** (1887-1953), quien supuso un hito en el progreso del hormigón, especialmente en estructuras laminares para cubrir grandes espacios, en base a formas antifuniculares para obtener resultados altamente atractivos, en una época donde los encofrados no resultaban excesivamente caros ^[4]. En la figura 1.10-5, se muestra uno de los ensayos de Dischinger para la construcción de un paraboloide de mínimo espesor, en el año 1931, para la empresa *Dyckerhoff & Widmann AG* (*Dywidag*).

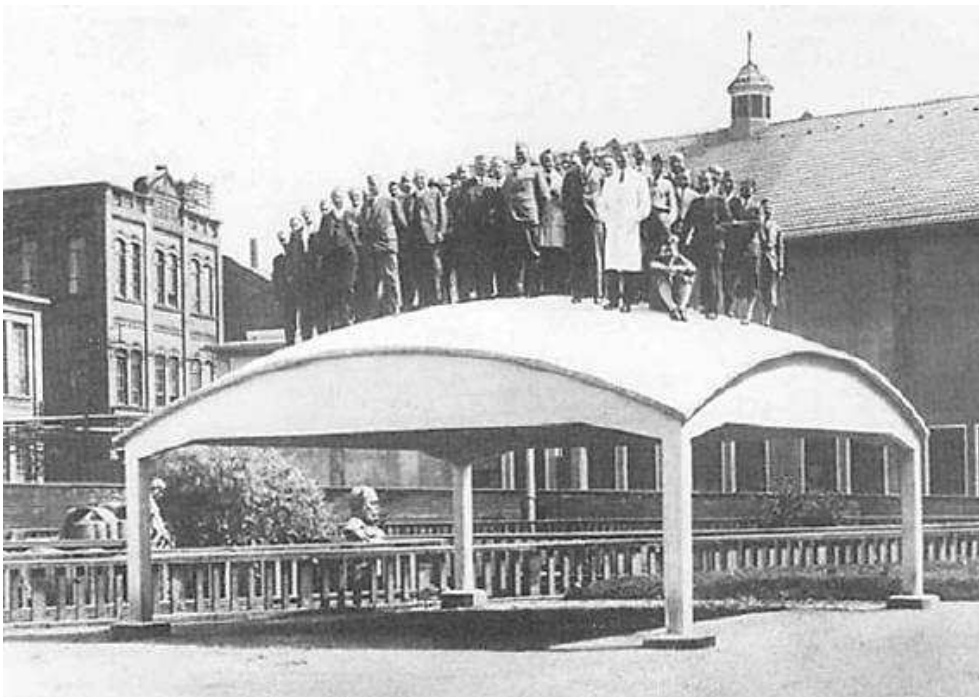
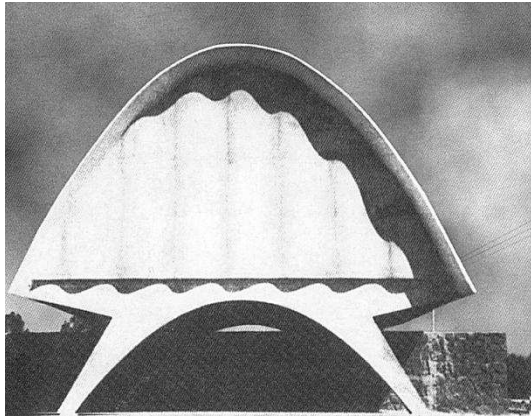


Figura 1.10-5. Ensayo de un paraboloide de mínimo espesor a cargo de Dischinger el año 1931. (Imágenes tomadas de [Hormigón estructural 2005, 72]).

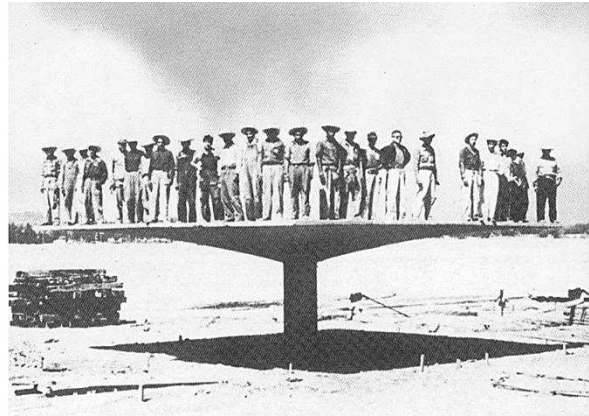
Sin duda, el pabellón de Maillart y los ensayos de Dischinger influyeron de forma considerable en la obra de muchos arquitectos e ingenieros de generaciones posteriores, como por ejemplo Félix Candela (1910-1997) y Eladio Dieste (1917-2000).

[4] Hormigón Estructural, U.D. (2005). *Notas para una historia del Hormigón Estructural*, p. 72.

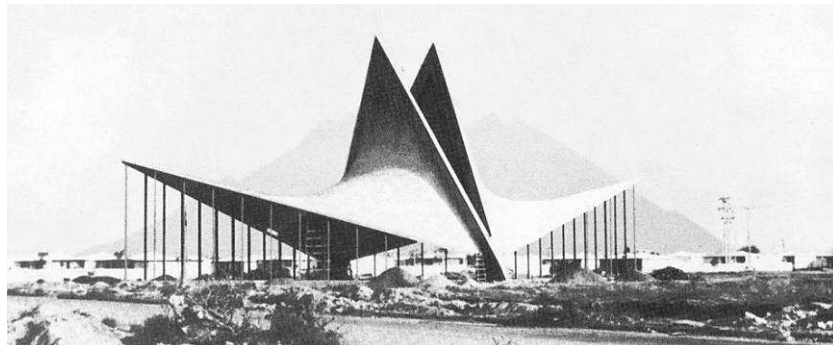
El arquitecto **Félix Candela** (1910-1997) centró su obra en la construcción de estructuras laminares continuas de hormigón, ligeramente armado, donde la relevancia reside en el formalismo, quedando la funcionalidad en un segundo plano. En la figura 1.10-6, se muestran algunas de las obras más representativas de Candela, como son, el Pabellón de investigación de rayos cósmicos (Universidad de México, 1951), la prueba de carga del paraboloide hiperbólico, la Iglesia de San José Obreo en Monterrey (1959-1960), o el restaurante “Los Manantiales” en Xochimilco (1959). Candela heredó algunos de los fundamentos de la obra del maestro Torroja, de quien posteriormente se exponen las obras de mayor relevancia en el ámbito de la construcción.



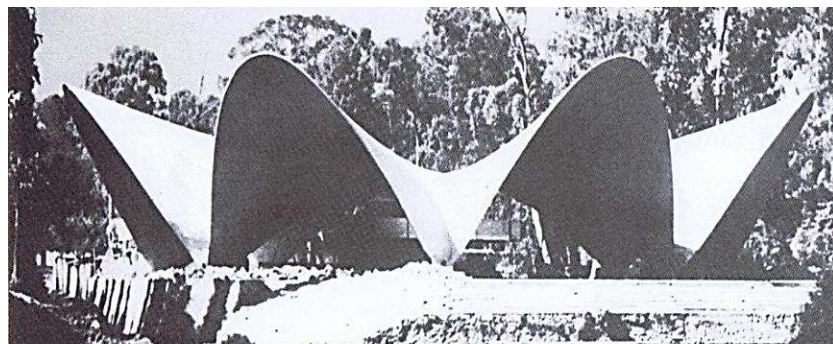
.a.



.b.



.c.



.d.

Figura 1.10-6. Estructura laminares de hormigón armado de Candela: a) Pabellón Universidad de México (1951), b) Prueba de carga de paraboloide hiperbólico, c) Iglesia de San José Obrero en Monterrey (1959-1960), d) Restaurante “Los Manantiales” (1959). (Imágenes tomadas de [Fernández Casado 2006, 666-669]).

En este contexto, el ingeniero uruguayo **Eladio Dieste** (1917-2000) centró su obra en la construcción de estructuras laminares resistentes por la forma (trabajando principalmente a esfuerzos de compresión pura), mediante la utilización de cerámica armada. Dieste disponía armaduras de acero entre las distintas láminas de ladrillo plano consiguiendo, así, una determinada capacidad resistente a tracción, esfuerzo que se puede producir bajo las cargas horizontales como el viento, siendo las vigas receptoras de los empujes, los únicos elementos resistentes que trabajan a flexión y a cortante. La obra de Dieste se caracteriza por su filosofía constructiva que describía como “...resistir por el peso no es más que una torpe acumulación de la materia, en cambio, no hay nada más noble y elegante que resistir por la forma”. Las «bóvedas gausas» de Dieste son un claro ejemplo de la optimización resistente y de su particular filosofía de las estructuras.

En el ámbito de la construcción de estructuras de fábrica resistentes, en base a su geometría, es oportuno mencionar a los arquitectos **Lluís Mancunill** (1868-1931) y **César Martinell** (1888-1973). Ambos autores se caracterizaron por su punto de vista de la conjunción entre la concepción arquitectónica y el concepto estructural. En cuanto a la obra de Mancunill, destacar el Vapor Jover, Amat y Aymeric de Terrassa (1908), mientras que por parte de Martinell, destacan las cerca de cuarenta bóvedas cooperativas que se encuentran en la provincia de Tarragona.

El ingeniero civil y estructural francés **Eugène Freyssinet** (1879-1962) patentó el hormigón pretensado el año 1928 y fue un gran constructor de puentes. En el ámbito de la edificación se centró en el diseño y la construcción de cubiertas y envolventes de espacios de grandes dimensiones. Una de las obras más destacables de Freyssinet son los hangares de Orly (1923), que se muestran en la figura 1.10-7.

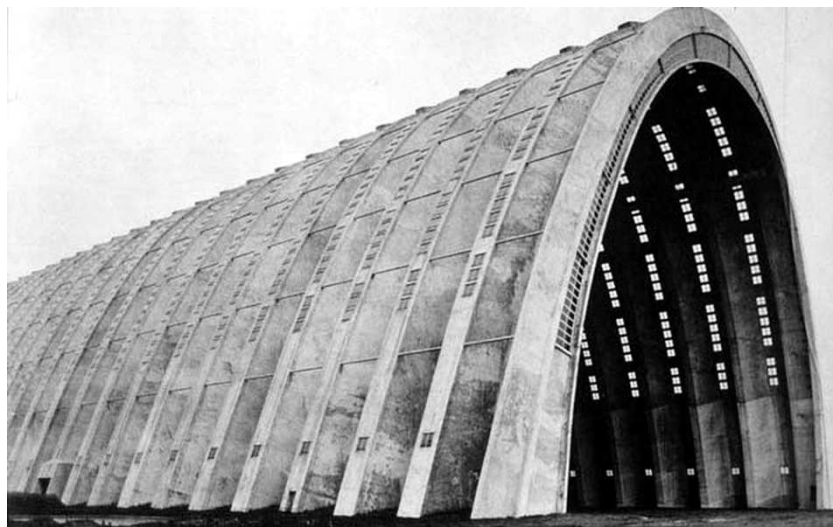


Figura 1.10-7. Hangares de Orly de Freyssinet (1923). (Imagen tomada de [Fernández Casado 2006, 502]).

Eduardo Torroja Miret (1899-1961) fue discípulo de Freyssinet, cuyas primeras obras se construyeron antes de la guerra civil española, de las cuales destacan el mercado de Algeciras (1933), el frontón Recoletos (1935) y el Hipódromo de la Zarzuela (1935), estos dos últimos en la ciudad de Madrid. Sin duda, uno de los aspectos más relevantes de Torroja fue el tratamiento de la forma, íntimamente relacionado con el uso del material más adecuado en sus diseños, de acuerdo al estado tensional correspondiente, como se desprende de su argumentación que se expone a continuación:

“Cada material tiene una personalidad específica distinta, y cada forma impone un diferente fenómeno tensional. La solución natural de un problema -arte sin artificio-, óptima frente al conjunto de impuestos previos que le originaron, impresiona con su mensaje, satisfaciendo, al mismo tiempo, las exigencias del técnico y del artista.

El nacimiento de un conjunto estructural, resultado de un proceso creador, fusión de técnica con arte, de ingenio con estudio, de imaginación con sensibilidad, escapa del puro dominio de la lógica para entrar en las secretas fronteras de la inspiración.

Antes y por encima de todo cálculo está la idea, moldeadora del material en forma resistente, para cumplir su misión.”

[Torroja Miret 1957, 2010, 11].

En la figura 1.10-8, se aprecia la cubierta del mercado de Algeciras (1933), donde utilizó hormigón pretensado, patentado el año anterior por Freyssinet previamente a que Torroja proyectara el mercado. Es destacable la distribución de las armaduras pasivas de acuerdo a las líneas isostáticas del elemento resistente aumentando, así, su eficiencia estructural.

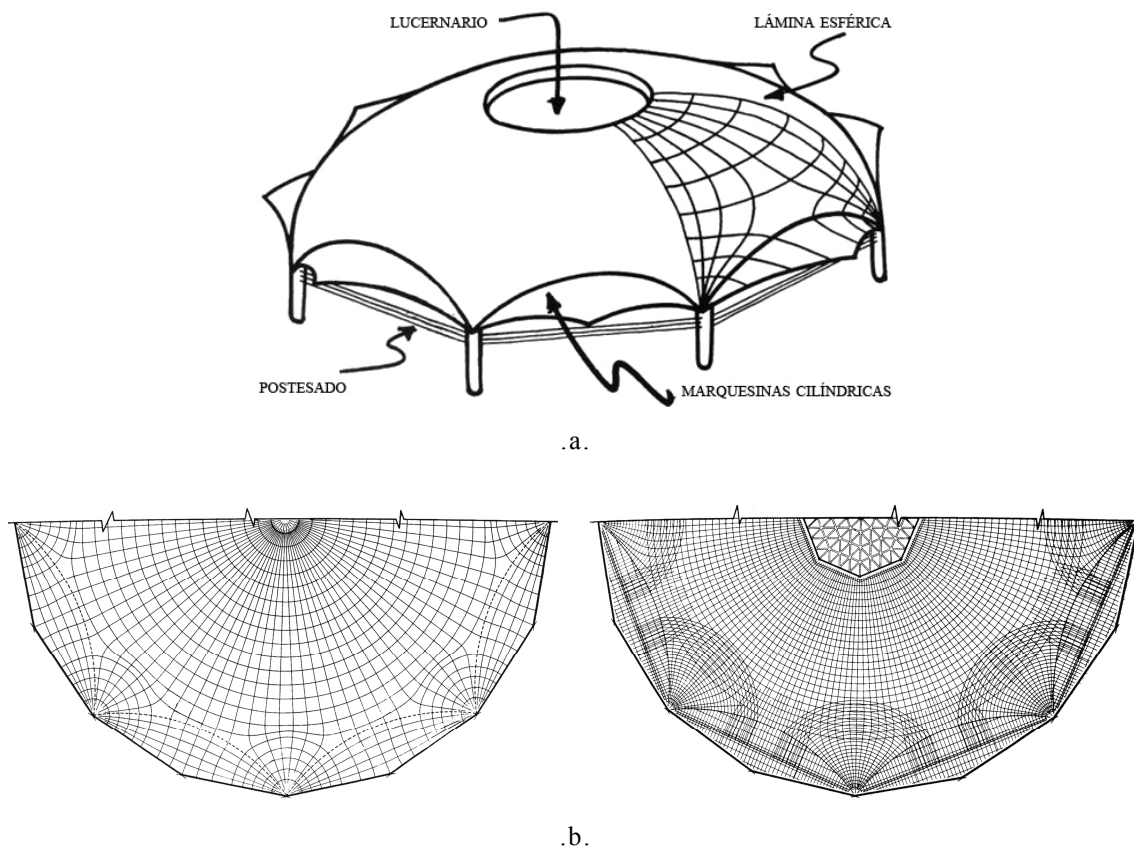


Figura 1.10-8. Mercado de Algeciras (1933) de Eduardo Torroja: a) Geometría de la cubierta, b) Líneas isostáticas y disposición de las armaduras en planta. (Imágenes tomadas de [Fernández Ordóñez et al. 1999, 104]).

En cuanto al frontón Recoletos construido el año 1935, Torroja proyecta una cubierta que se convierte en uno de sus proyectos más significativos, en parte, gracias a sus características geométricas. La estructura cubre una zona rectangular de 55 metros de largo y 32,5 metros de ancho. “Al contrario de lo aconsejado por la experiencia de estribar los arcos, aquí la gran viga que debe realizar el trabajo longitudinal es una lámina cilíndrica, donde no tiene más necesidad que controlar su deformación transversal para no perder la forma y, con ella, la eficacia resistente”,

como describe Manterola ^[5]. En la figura 1.10-9, se muestra la geometría de la cubierta del frontón Recoletos.

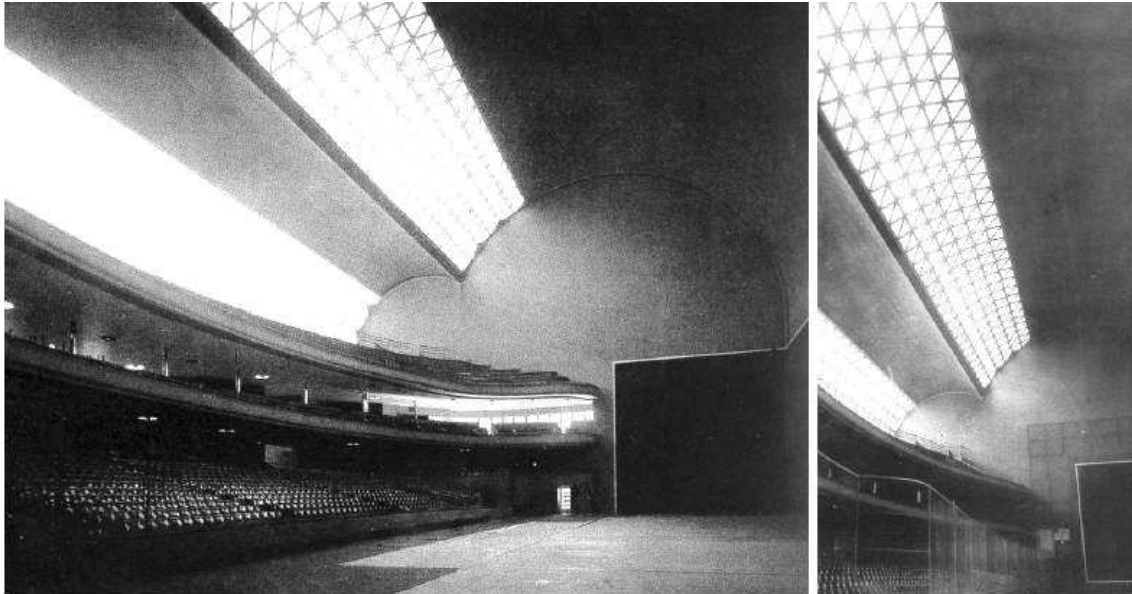


Figura 1.10-9. Vistas del interior del frontón Recoletos (1935). (Imagen tomada de [Fernández Ordóñez et al. 1999, 144 y 145]).

Por lo tanto, la cubierta proyectada ofrece grandes ventajas estructurales, a la vez que una geometría que se construye de manera sencilla, derivadas de su ligereza y gran resistencia, dando respuesta a las necesidades funcionales, y estéticas, en base a su forma.

Siguiendo el mismo concepto de optimización según la forma, otra obra de relevancia de Torroja es la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela de Madrid, construida el año 1935, la cual se caracteriza por el mismo concepto estructural que el propio Torroja define de la siguiente manera, como se ha referido en la introducción del presente capítulo:

“La obra mejor es la que se sostiene por su forma y no por la resistencia oculta de su material.”

Eduardo Torroja, citado por [Fernández Ordóñez et al. 1999, 49].

La cubierta de las gradas de la tribuna del Hipódromo de la Zarzuela, se caracteriza por ser una estructura laminar de hormigón armado, formada por lóbulos sensiblemente hiperbólicos. La estructura está formada exclusivamente por las láminas de hormigón armado, soportando todas las cargas sin nervios, refuerzos, ni viguetas. Su espesor es variable, desde los 5 cm, en los extremos de los voladizos, hasta los 15 cm en la sección de los apoyos, con el incremento obligado en la arista de unión entre lóbulos (hasta 65 cm de espesor), para una marquesina laminar que vuela 12,80 metros. La única duda que presentaba dicha geometría, pero que en ningún caso impidió que se llevara a cabo, residió en la elevada complejidad para su cálculo analítico al tratarse de una lámina de doble curvatura y de espesor variable, que Eduardo Torroja Miret describía de la siguiente manera:

[5] Manterola Armisen, J. (1998). *La estructura resistente en la arquitectura actual*, pp. 21 y 22.

“Para un ojo medianamente acostumbrado a este tipo de estructuras resultaba claro que esta forma de lámina era apta para resistir bien los esfuerzos y el fenómeno estructural que se le pedía [...]. Quizás lo más interesante de esta estructura era la imposibilidad de desarrollar un cálculo analítico perfecto de la misma; pero que ello no justificaba una negativa a su empleo, ya que las ventajas de ligereza, de adaptabilidad al fenómeno resistente y de efecto estético parecían evidentes”.

[Torroja Miret 1941, 217].

Para el diseño de la cubierta, Torroja estudió las distintas alternativas laminares, empezando por las geometrías básicas como el arco o el conoide, pero se descartaron por no resultar soluciones muy atractivas. Es por ello que se optó, a diferencia de la primera solución, por dar al perfil una doble curvatura, tomando las bóvedas forma de sectores de hiperboloide. Una forma arqueada que permite que sea una figura auto-estable, como se aprecia en la figura 1.10-10.

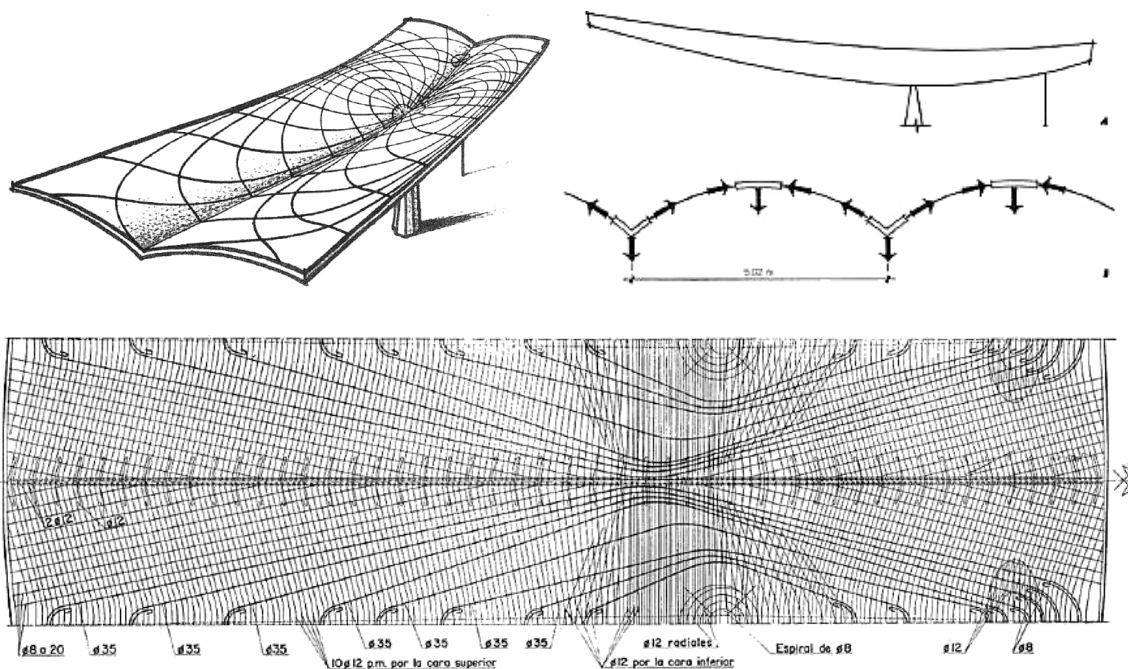


Figura 1.10-10. Líneas isostáticas y sentido de los esfuerzos en la sección transversal de la cubierta laminar del Hipódromo de la Zarzuela. Distribución en planta del armado pasivo de la lámina de la marquesina. (Imágenes tomadas de [Fernández Ordóñez et al. 1999, 124 y 125]).

Como se infiere de la figura 1.10-10, así como la idea que se desprende de la palabras de Torroja, “*Conocidas así las tensiones, se puede disponer, como es costumbre en hormigón armado, las armaduras transversales y longitudinales más apropiadas, [...]*”^[6], el trazado conocido de las líneas isostáticas del módulo laminar de la cubierta del Hipódromo de Madrid, permite definir la distribución del armado pasivo de las láminas de hormigón armado, para obtener una mayor eficiencia. Otras obras de referencia de Torroja, en el ámbito de la edificación, son el Hangar de Barajas (1941) y el Hangar de *Cuatro Vientos* (1949), caracterizado por su estructura laminar de bóveda triangulada.

La obra del francés Freyssinet y el español Torroja fueron un referente para muchos ingenieros y arquitectos. Algunos de ellos pertenecientes a otros países, como

[6] Torroja Miret, E. (1941). *Estructura de las tribunas del nuevo Hipódromo de Madrid*, p. 219.

fue el caso de los ingenieros Pier Luigi Nervi (1891-1979) y Ricardo Morandi (1902-1989).

Pier Luigi Nervi (1891-1979) fue uno de los más grandes, e innovadores, diseñadores y constructores del siglo XX. Sus majestuosas y monumentales obras representaron una época de madurez y de expansión de la técnica del hormigón armado. A igual que otros precursores en esta técnica, su personalidad permitió abarcar muchas facetas, incluidas las de diseñador, constructor, investigador y creador de nuevos métodos de construcción,^[7].

La obra de Nervi es un claro ejemplo del uso de la forma para obtener un mejor comportamiento estructural de sus proyectos, en busca de un “comportamiento estructural elegante y sensual, rasgo claramente definitorio de la orientación de sus estructuras”^[8]. Su especialidad reside en el uso de nervios o nervaduras en el diseño de sus forjados de acuerdo a las líneas isostáticas que Pier Luigi Nervi expone de la siguiente manera:

“El satisfactorio resultado estético de los nervios colocados de esta manera es un claro recordatorio de esa misteriosa afinidad, a encontrar entre las leyes de la física y nuestros sentidos”.

Pier Luigi Nervi, citado por [Aguiló Alonso et al. 2004, 28].

Las placas nervadas según las líneas isostáticas, de acuerdo a la figura 1.10-11, es un concepto que Mario Salvadori y Robert Heller definen como:

“La eficiencia estructural de las placas puede aumentarse reforzándolas con nervaduras, eliminando así la parte del material de la zona próxima al plano neutro, sin tensiones. Igual resultado puede lograrse plegando la placa”.

[Salvadori et al. 1998, 164].

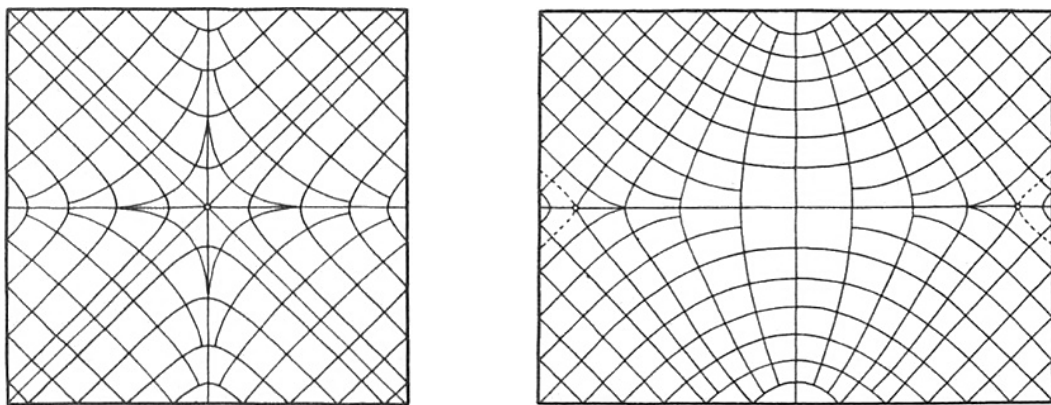


Figura 1.10-11. Líneas isostáticas de placas simplemente apoyadas, sometidas a una carga uniforme. (Imágenes tomadas de [Salvadori et al. 1998, 151]).

En la figura 1.10-12, se muestran algunas de las obras más representativas de Nervi como son el Hangar en Orvieto (1935), la *Gatti Woll Gallery* (1953), así como el *Palazzetto dello Sport* en Roma (1957).

[7] Chiorino, M.A.; Chiorino, C. (2013). *Pier Luigi nervi: Architecture as Challenge*, p. 14.

[8] Aguiló Alonso, M.; Manterola Armisén, J.; Onzain Gutiérrez, M.; Rui-Wamba Martija, J. (2004). *Javier Manterola Armisén. Pensamiento y obra*, p. 56.

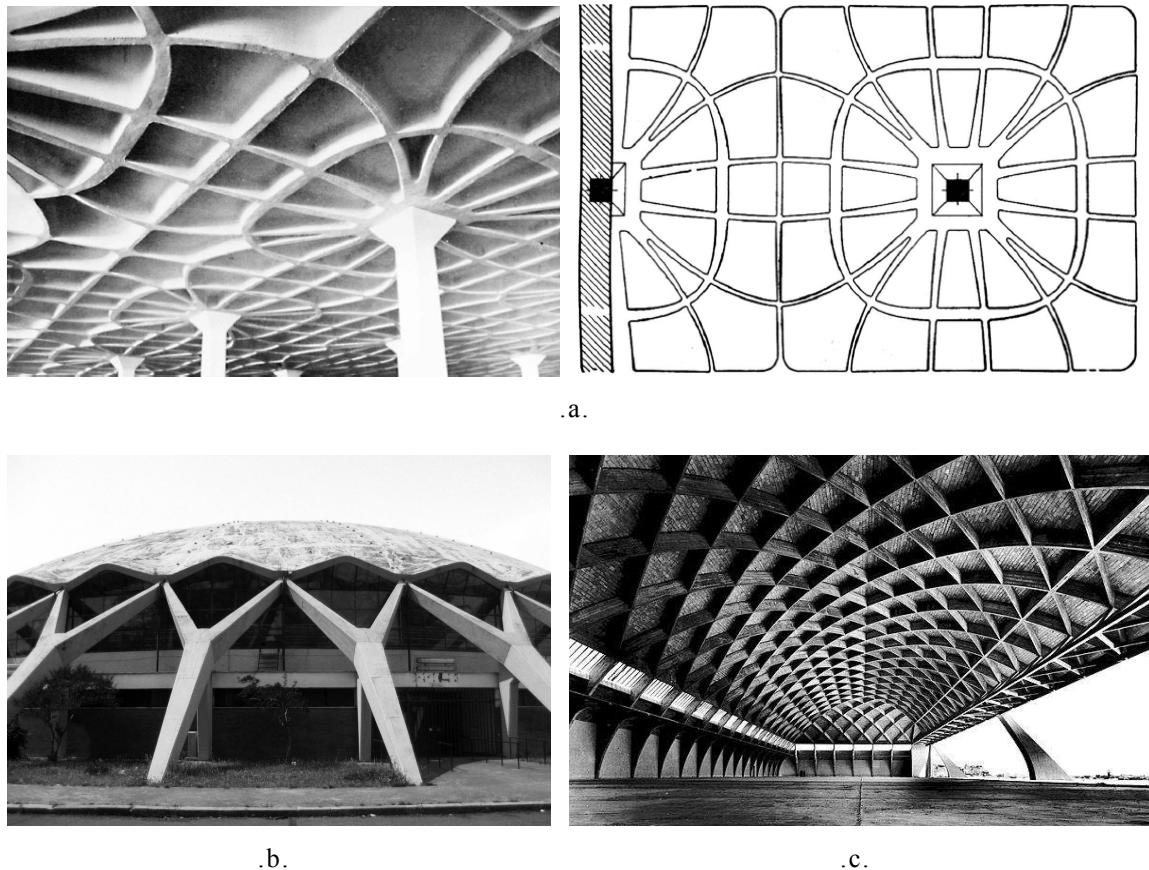


Figura 1.10-12. Obras de Nervi de acuerdo a la identificación de la direcciones principales: a) *Gatti Wool Factory* (1953), b) *Palazzetto dello Sport* en Roma (1957), c) Hangar en Orvieto (1935). (Imágenes tomadas de [Chiorino et al. 2013, 15 y 18]).

Ricardo Morandi (1902-1989) destacó fundamentalmente por la construcción de puentes, pero también realizó algunas obras relevantes dentro del ámbito de la edificación como, por ejemplo, la cubierta del moderno santuario de la *Madonna delle Lacrime*, en Siracusa, cuya geometría se muestra en la figura 1.10-13.

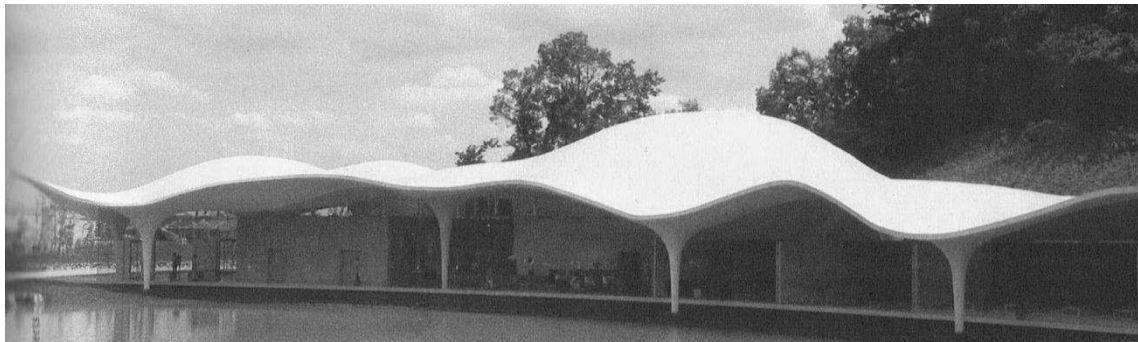


Figura 1.10-13. Cubierta del santuario la *Madonna delle Lacrime*, en Siracusa, obra de Morandi. (Imagen tomada de [Brufau Niubó 1998/99, 44]).

En este contexto, de acuerdo a estructuras resistentes por su forma, destacar algunas obras como el puente sobre el Basento de **Sergio Musmeci** (1926-1981), **Heinz Isler** (1926-2009) o el Crematorio *Kakamigahara* (2004-2006), obra del arquitecto **Toyo Ito** (1941-) y del ingeniero **Mutsuro Sasaki** (1941-), las cuales se aprecian en la figura 1.10-14.



.a.



.b.

Figura 1.10-14. a) Puente sobre el Basento de Sergio Musmeci, b) Crematorio *Kakamigahara* de Ito y Sasaki (2004-2006). (Imágenes tomadas de [Ferre et al. 2000, 99]).

En este sentido destacar autores como Vladimir Shukhov (1853-1939), Buckminster Fuller (1895-1983), Emilio Pérez Piñero (1935-1972), Robert Le Ricolais (1894-1977), Frei Otto (1925-) o Jörg Schlaich (1934-), cuyas obras se tratarán posteriormente en el tercer capítulo de este trabajo, acerca de estructuras espaciales malladas, las cuales se caracterizan por su ligereza, sin mermar la rigidez global del sistema.

A tenor de lo expuesto a lo largo del presente capítulo, se puede concluir que la forma desempeña una función estructural de gran relevancia. Como se infiere de la utilidad de la línea de presiones para el análisis del equilibrio y del comportamiento estructural, se convierte en una herramienta válida para muchas aplicaciones. En base a este concepto de optimización según la forma, en el segundo capítulo se aborda un estudio comparativo de vigas de celosía, atendiendo a las direcciones principales identificadas por sus líneas isostáticas. La comparación de la distintas geometrías de armaduras, ya sean biapoyadas o en voladizo, es de suma relevancia dado el estudio final de estructuras de entramado (espaciales) envolvente de edificios en altura, temática ésta, objeto principal de estudio de la presente Tesis.